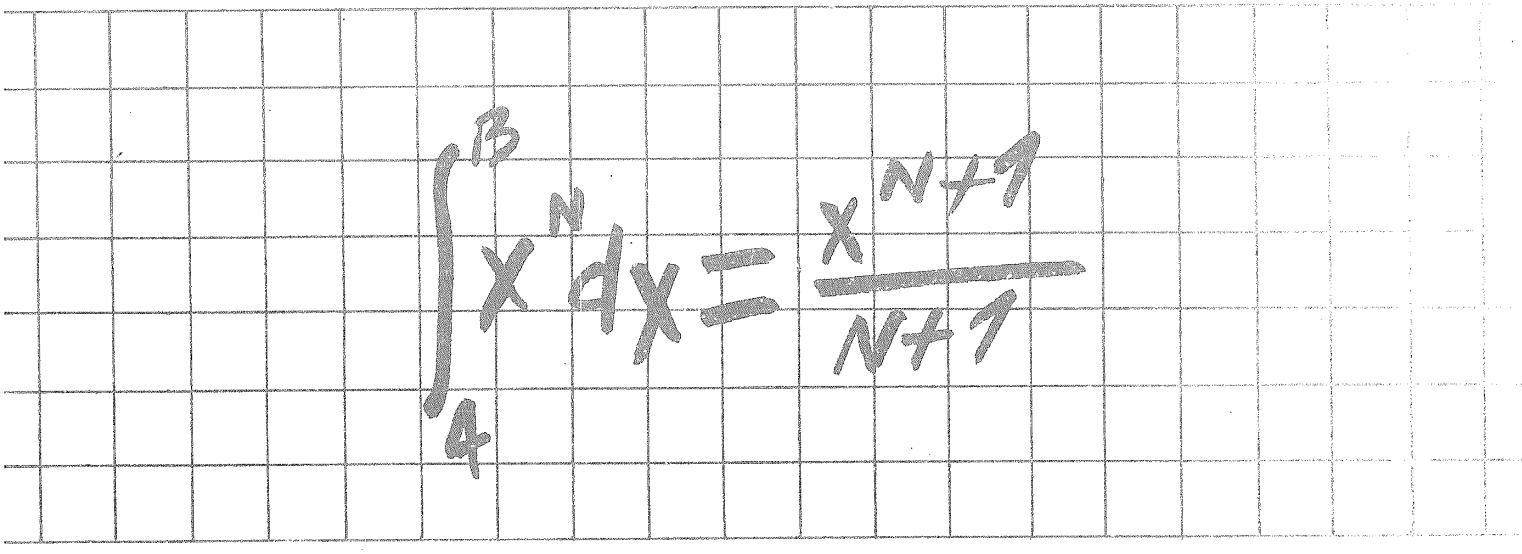
INTEGRALES ELEMENTALES

Obras que integran el bloque 8 *(Cálculo integral):*

1. Sumatoria y notación
2. La integral definida y la integral indefinida
3. *Integrales elementales*
4. Métodos de integración 1
5. Métodos de integración 2
6. Algunas aplicaciones del cálculo integral

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 8
Cálculo integral

Módulo 3
INTEGRALES ELEMENTALES

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

La presentación y disposición en conjunto de
INTEGRALES ELEMENTALES
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, septiembre 1984
ISBN 968-24-1434-2

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta*. Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

3.1 Integrales elementales

3.2 Integrales de funciones trigonométricas-obtención de fórmulas

3.3 Integrales de las funciones trigonométricas —práctica—

3.4 Integrales de funciones trigonométricas inversas

3.5 Integrales de funciones exponenciales

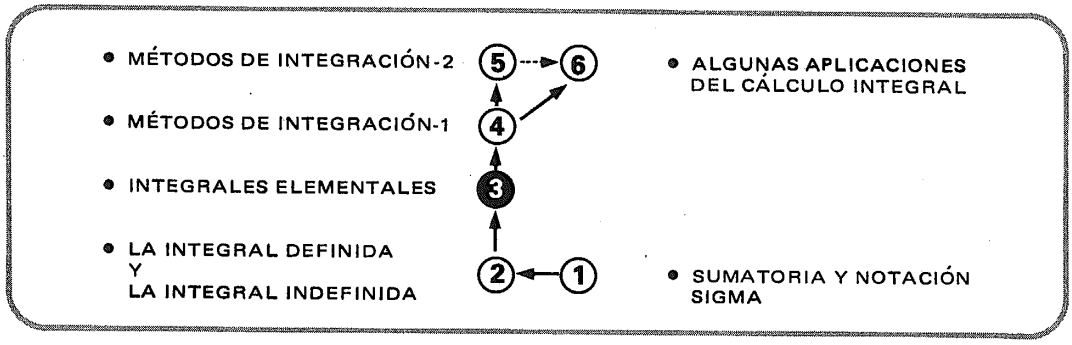
3.6 Evaluación de integrales definidas

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 8. Cálculo integral

Objetivos: integrar algunas funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los procedimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 8



Módulo 3. Integrales elementales

Objetivos: integrar algunas funciones trascendentes

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Manejo de expresiones exponenciales o logarítimicas	2	9, 10
• Manejo de expresiones trigonométricas	5	1, 3, 4, 5, 6, 8
• Continuidad y límite de una función	7	2, 3
• Derivación de funciones algebraicas o trascendentes	7	4, 5
• Conceptos de integral	8	1, 2

3.1

Integrales elementales

1

Hemos obtenido y
empezado a aplicar
las siguientes **reglas** de integración:

1. $\int du = u + C$
2. $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$
3. $\int [f_1(u) + f_2(u) + \ldots + f_n(u)]\, du$
   $= \int f_1(u)du + \int f_2(u)du + \ldots + \int f_n(u)du$
4. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

2

Para completar la tabla del cuadro anterior,
agregamos la siguiente fórmula:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

que se desprende de nuestra conocida
fórmula de derivación:

$$\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{\dfrac{du}{dx}}{u}$$

3

Tenemos, para la derivada del logaritmo natural de una función:

$$\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

Y de acuerdo con lo que hemos aprendido en el módulo anterior acerca de derivadas y antiderivadas:

$$\frac{d(\ln u + C)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

4

Derivada:

$$\frac{d(\ln u + C)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

Diferencial:

$d(\ln u + C) =$ [ ]

$$\frac{\frac{du}{dx} \cdot \cancel{dx}}{u} = \frac{du}{u}$$

5

$$d(\ln u + C) = \frac{du}{u}$$

Tomando la integral de cada uno de los miembros:

$$\int d(\ln u + C) = \int \frac{du}{u}$$

o bien:

$\int \frac{du}{u} =$ [ ]

$\cancel{\int} d(\ln u + C) = \ln u + C$

6

Escribimos $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

puesto que:

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C \quad \text{si } u > 0$$

y

$$\int \frac{d(-u)}{-u} = \ln(-u) + C \quad \text{si } u < 0$$

Esta expresión viene a llenar
el hueco en la fórmula $\int u^n du$
para $n = -1$: $\int u^{-1} du = \ln|u| + C$

7

Tabla 1. Integrales elementales

1. $\int du = u + C$
2. $\int cf(u)du = c\int f(u)du$
3. $\int [f_1(u) + f_2(u) + \ldots + f_n(u)]\, du$
$= \int f_1(u)du + \int f_2(u)du + \ldots + \int f_n(u)du$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

8

Veamos a continuación
algunas integrales
cuyo resultado puede ser dado
en forma inmediata
mediante la aplicación
de una o varias de las fórmulas
de la tabla 1.

9

$\int x^3 dx =$ ____

$\int 5x^2 dx =$ ____

$\int x^{\frac{2}{3}} dx =$ ____

$\int 3x^{-2} dx =$ ____

$\frac{x^4}{4} + C$

$\frac{5x^3}{3} + C$

$\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

$-3x^{-1} + C$

10

Las siguientes integrales requieren un poco más de esfuerzo.

$\int \sqrt{x}\, dx =$ ____ $=$ ____

____

$\int \sqrt[3]{x}\, dx =$ ____ $=$ ____

____

- $\int x^{\frac{1}{2}} dx$
- $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$
- $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$
- $\int x^{\frac{1}{3}} dx$
- $\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C$
- $\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$

1

$\int \frac{3dx}{4\sqrt{x}} =$ ____ $=$ ____

____

$\int -\frac{dx}{2\sqrt[3]{x^2}} =$ ____ $=$ ____

____

- $\frac{3}{4}\int x^{-\frac{1}{2}} dx$
- $\frac{3}{4}$
- $2x^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{3\sqrt{x}}{2}$
- $-\frac{1}{2}\int x^{-\frac{2}{3}} dx$
- $-\frac{1}{2}$
- $3x^{\frac{1}{3}}$
- $-\frac{3\sqrt[3]{x}}{2}$

12

$\int (3x^2 - 6x + 5)dx =$ _____

$\int (2x + 3)^2 dx =$ _____

_____

$x^3 - \frac{x^2}{3} + 5x + C$

$\int (4x^2 + 12x + 9)dx$

$\frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{6} + 9x + C$

13

$\int \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx =$ _____

_____

$\int (x^2 - x^{-2})dx$

$\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$

14

$\int (x + 2)(x - 3)dx =$ _____

_____

$\int (3x + 1)(2x - 3)dx =$ _____

_____

$\int (x^2 - x - 6)dx$

$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + C$

$\int (6x^2 - 7x - 3)dx$

$2x^3 - \frac{7x^2}{2} - 3x + C$

15

$\int x^2(x+1)^2dx =$ _____

_____

$\int (x+1)(x-1)dx =$ _____

_____

$\int (x^4 + 2x^3 + x^2)dx$

$\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + C$

$\int (x^2 - 1)dx$

$\frac{x^3}{3} - x + C$

16

$\int \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2dx =$ _____

_____

$\int \left(\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x^3}\right)dx$

$\int \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x + x^{\frac{3}{2}}\right)dx$

$\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^2 + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$

$\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x^2 + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$

17

$\int \frac{(x^3 - 2x^2)dx}{3x} =$ _____

_____

$\frac{1}{3}\int x^2dx - \frac{2}{3}\int xdx$

$\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{3} + C$

18

$$\int \frac{(x^2 - 2x + 3)dx}{\sqrt{x}} = \square$$

$$\square$$

$$\square$$

$$\int \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 6\sqrt{x} + C$$

19

No olvidemos que
es posible
comprobar por diferenciación
el resultado
de una integral.

20

Por ejemplo:
hemos obtenido.

$$\int \frac{(x^2 - 2x + 3)dx}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 6\sqrt{x} + C$$

$$= \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$$

ahora, por diferenciación, tenemos:

$$\square$$

$$\left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$\left(\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$$

- $\frac{(x^2 - 2x + 3)dx}{\sqrt{x}}$

21

$\int \frac{dx}{x} =$ ⌊_____⌋

$\ln|x| + C$

22

$\int \frac{dt}{t} =$ ⌊_____⌋

$\ln|t| + C$

23

$\int \frac{dz}{z} =$ ⌊_____⌋

$\ln|z| + C$

24

$$\int \frac{dx}{3x} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\boxed{\qquad\qquad}$$

$$\int \frac{5dx}{x} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\boxed{\qquad\qquad}$$

$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x}$

$\frac{1}{3}\ln|x| + C$

$5\int \frac{dx}{x}$

$5\ln|x| + C$

25

$$\int \frac{dx}{3x + 5} = ?$$

En este caso no es fácil dar el resultado en forma inmediata.
Es necesario llevar la integral a la forma tipo:

$$\int \frac{du}{u}$$

26

$$\int \frac{dx}{3x + 5}$$

Introduciremos una nueva variable independiente (u) y en términos de ésta expresaremos la integral.

Hacemos $3x + 5 = u$

por lo tanto, diferenciando: $\boxed{\qquad\qquad}$ ←1

de donde: $dx = \boxed{\qquad\qquad}$ ←2

$3dx = du$

$\frac{du}{3}$

27

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$3x + 5 = u$ ← **1**

$3dx = du$

$dx = \frac{du}{3}$ ← **2**

Si sustituimos **1** y **2** en la integral dada, obtenemos una nueva integral expresada en términos de **u**.

$$\int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$$

28

El resultado, en términos de u, puede ahora ser dado en forma inmediata.

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{1}{3}\ln|u| + C_1$$

29

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C_1$$

$3x + 5 = u$ ← **1**

$3dx = du$

$dx = \frac{du}{3}$ ← **2**

Finalmente, escribimos el resultado en términos de la variable original (x): $\boxed{\qquad\qquad}$

$$\frac{1}{3}\ln|3x+5| + C$$

30

Estudiemos con atención este procedimiento de **cambio de variable:**

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C_1 = \frac{1}{3}\ln|3x+5| + C$$

$3x + 5 = u$ ← 1

$3dx = du$

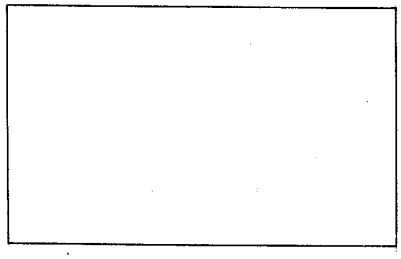
$dx = \frac{du}{3}$ ← 2

} ecuaciones de cambio de variable

31

Apliquemos el procedimiento estudiado para determinar:

$$\int \frac{5dx}{2-3x}$$



← Ecuaciones de cambio de variable

$2 - 3x = u$ ← 1

$-3dx = du$

$dx = -\frac{du}{3}$ ← 2

32

$$\int \frac{5dx}{2-3x} = \square$$

$2 - 3x = u$ ← 1

$-3dx = du$

$dx = -\frac{du}{3}$ ← 2

Integral expresada en términos de u. ↑

$$\int 5 \cdot \left(-\frac{du}{3}\right) \cdot \frac{1}{u} = -\frac{5}{3}\int \frac{du}{u}$$

33

$$\int \frac{5dx}{2-3x} = -\frac{5}{3}\int \frac{du}{u} = \boxed{\quad}$$

Resultado en términos de u.

$$-\frac{5}{3}\ln|u| + C_1$$

34

$$\int \frac{5dx}{2-3x} = -\frac{5}{3}\int \frac{du}{u} = -\frac{5}{3}\ln|u| + C_1$$

$2 - 3x = u$ ← 1

$-3dx = du$

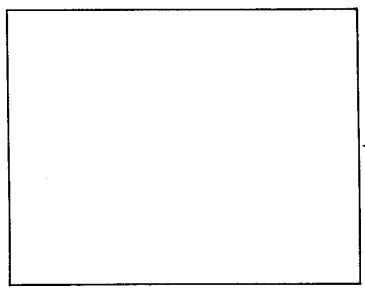
$dx = -\frac{du}{3}$ ← 2

Resultado expresado en términos de x: $\boxed{\quad}$

$$-\frac{5}{3}\ln|2-3x| + C$$

35

$$\int \frac{dt}{a+bt} = ?$$



ecuaciones de cambio de variable

$a + bt = u$ ← 1

$bdt = du$

$dt = \frac{du}{b}$ ← 2

36

$$\int \frac{dt}{a+bt} = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$a + bt = u$ ← 1

$bdt = du$

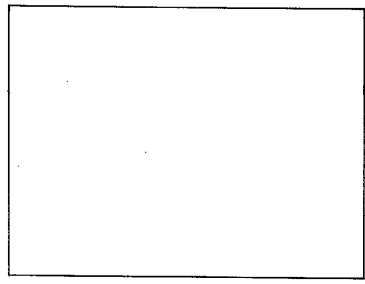
$dt = \frac{du}{b}$ ← 2

$= \boxed{\qquad\qquad}$

- $\int \frac{du}{b} \cdot \frac{1}{u}$
- $\frac{1}{b}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{b} \ln|u| + C_1$
- $\frac{1}{b} \ln|a + bt| + C$

37

$$\int \frac{xdx}{x^2 - 1} = ?$$



← ecuaciones de cambio de variable

$x^2 - 1 = u$ ← 1

$2xdx = du$

$xdx = \frac{du}{2}$ ← 2

38

$$\int \frac{xdx}{x^2 - 1} = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$x^2 - 1 = u$ ← 1

$2xdx = du$

$xdx = \frac{du}{2}$ ← 2

$\boxed{\qquad\qquad}$

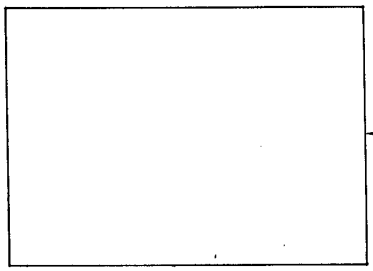
$$\int \frac{du}{2} \cdot \frac{1}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u| + C_1$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C$$

39

$$\int \frac{x^2\,dx}{8-x^3} = ?$$



← ecuaciones de cambio de variable

$8 - x^3 = u$ ← 1

$-3x^2\,dx = du$

$x^2\,dx = -\frac{du}{3}$ ← 2

40

$$\int \frac{x^2\,dx}{8-x^3} = \square = \square$$

$8 - x^3 = u$ ← 1

$-3x^2\,dx = du$

$x^2\,dx = -\frac{du}{3}$ ← 2

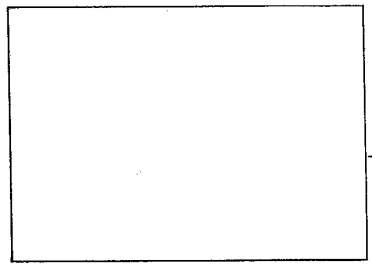
$$\int \left(-\frac{du}{3}\right)\cdot\frac{1}{u} = -\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|u| + C_1$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|8-x^3| + C$$

41

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = ?$$



← ecuaciones de cambio de variable

$x^2 - 1 = u$ ← 1

$2x\,dx = du$

$dx = \frac{du}{2x}$

$x^2 = u + 1$ de ← 1

$x = \pm\sqrt{u+1}$ ← 2

$dx = \frac{\pm\,du}{2\sqrt{u+1}}$ ← 3

42

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$x^2 - 1 = u$ ← 1

$x = \pm\sqrt{u + 1}$ ← 2

$dx = \dfrac{\pm\, du}{2\sqrt{u + 1}}$ ← 3

Integral expresada en términos de u

$$\int \frac{\pm\, du}{2\sqrt{u + 1}} \cdot \frac{1}{u} = \int \frac{\pm\, du}{2u\sqrt{u + 1}}$$

$$= \pm\frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u + 1}}$$

43

¿Qué podemos decir
con respecto a la integral que resultó
al efectuar el cambio de variable?

Por ejemplo,

que no corresponde a ninguna de las formas tipo de la tabla 1.

44

$$\int \frac{(2x - 5)dx}{x^2 - 5x}$$

ecuaciones de cambio de variable

$x^2 - 5x = u$ ← 1

$(2x - 5)dx = du$ ← 2

45

$$\int \frac{(2x-5)dx}{x^2-5x} = \boxed{\qquad} = \boxed{\qquad}$$

$x^2 - 5x = u$ ← 1

$(2x-5)dx = du$ ← 2

$= \boxed{\qquad}$

- $\int \frac{du}{u}$
- $\ln|u| + C_1$

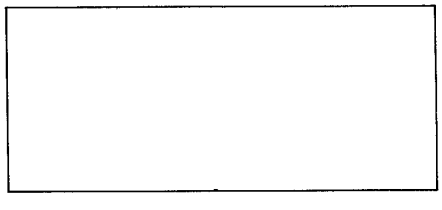
$\ln|x^2 - 5x| + C$

46

$\int \sqrt{3x}\,dx$

Intentemos efectuar un cambio de variable, haciendo:

$3x = u$ ← 1



← ecuaciones de cambio de variable

$\sqrt{3x} = \sqrt{u}$ ← 2

$3dx = du$

$dx = \frac{du}{3}$ ← 3

47

$$\int \sqrt{3x}\,dx = \boxed{\qquad}$$

$3x = u$ ← 1

$\sqrt{3x} = \sqrt{u}$ ← 2

$3dx = du$

$dx = \frac{du}{3}$ ← 3

$$\int \sqrt{u}\,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du$$

48

$$\int \sqrt{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du$$

Podemos dar el resultado de esta integral expresada en términos de u, pues corresponde a la forma tipo número [ ] de la tabla 1.

4

49

$$\int \sqrt{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = [\quad]$$

$3x = u$ ← 1

$\sqrt{3x} = \sqrt{u}$ ← 2

$3dx = du$

$dx = \frac{du}{3}$ ← 3

$$\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{9} = \frac{2\sqrt{u^3}}{9} + C_1$$

$$\frac{2\sqrt{27x^3}}{9} + C = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3} + C$$

$$= \frac{2x\sqrt{3x}}{3} + C$$

50

$$\int \sqrt{1+3x}\,dx$$

[ ] ← ecuaciones de cambio de variable

$1 + 3x = u$ ← 1

$3dx = du$

$dx = \frac{du}{3}$ ← 2

51

$$\int \sqrt{1+3x}\,dx = \boxed{\qquad\qquad}$$

$1 + 3x = u$ ←1

$3dx = du$

$dx = \frac{du}{3}$ ←2

$$\int \sqrt{u}\,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C_1$$

$$= \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{9} + C_1$$

$$= \frac{2\sqrt{(1+3x)^3}}{9} + C$$

52

$$\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx$$

$\boxed{\qquad\qquad}$ ← ecuaciones de cambio de variable

$2x^2 + 3 = u$ ←1

$4xdx = du$

$xdx = \frac{du}{4}$ ←2

53

$$\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx = \boxed{\qquad\qquad}$$

$2x^2 + 3 = u$ ←1

$4xdx = du$

$xdx = \frac{du}{4}$ ←2

$$\int \sqrt{u}\,\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

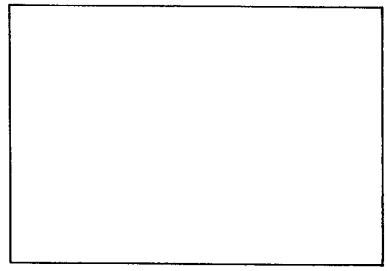
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C_1$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{6} + C_1$$

$$= \frac{\sqrt{(2x^2+3)^3}}{6} + C$$

54

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$$



← ecuaciones de cambio de variable

$1 - 2x = u$ ← 1

$-2dx = du$

$dx = -\frac{du}{2}$ ← 2

55

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$1 - 2x = u$ ← 1

$-2dx = du$

$dx = -\frac{du}{2}$ ← 2

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

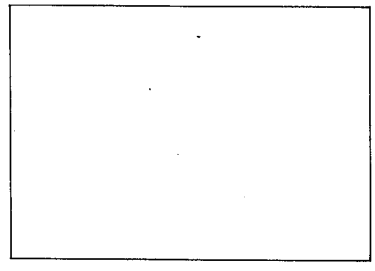
$$= -\frac{1}{2} \cdot 2u^{\frac{1}{2}} + C_1$$

$$= -u^{\frac{1}{2}} + C_1$$

$$= -\sqrt{1-2x} + C$$

56

$$\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2+5}}$$



← ecuaciones de cambio de variable

$x^2 + 5 = u$ ← 1

$2xdx = du$

$xdx = \frac{du}{2}$ ← 2

57

$$\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2+5}} = \square$$

$x^2 + 5 = u$ ← 1

$2xdx = du$

$xdx = \frac{du}{2}$ ← 2

$$3\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}} = 3\int \frac{du}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{3}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2u^{\frac{1}{2}} + C_1$$

$$= 3u^{\frac{1}{2}} + C_1$$

$$= 3\sqrt{x^2+5} + C$$

58

$$\int \frac{(3x^2+2)\,dx}{\sqrt{x^3+2x}} = \square$$

ecuaciones de cambio de variable.

$x^3 + 2x = u$ ← 1

$(3x^2 + 2)dx = du$ ← 2

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= 2u^{\frac{1}{2}} + C_1$$

$$= 2\sqrt{x^3+2x} + C$$

8.3.1.1

Práctica adicional de cálculo de integrales de las formas elementales contenidas en la tabla 1, haciendo, si es necesario, un cambio de variable, si se considera necesario.

8.3.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* integrales indefinidas que pertenecen o pueden ser llevadas, mediante un cambio de variable, a alguna de las formas elementales contenidas en la tabla 1.

3.2

Integrales de funciones trigonométricas —obtención de fórmulas

59

Recordemos estas 6 reglas para la diferenciación de funciones trigonométricas:

1. $\dfrac{d(\text{sen}u)}{dx} = \cos u \cdot \dfrac{du}{dx}$

2. $\dfrac{d(\cos u)}{dx} = -\,\text{sen}\,u \cdot \dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \cdot \dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d(\text{cot}u)}{dx} = -\,\text{cosec}^2\, u \cdot \dfrac{du}{dx}$

5. $\dfrac{d(\sec u)}{dx} = \sec u \tan u \cdot \dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d(\text{cosec}u)}{dx} = -\,\text{cosec}\,u \cot u \cdot \dfrac{du}{dx}$

De cada una de ellas podemos deducir una fórmula de integración.

60

De la fórmula **1** :

$$\frac{d(\text{senu})}{dx} = \text{cosu} \cdot \frac{du}{dx} :$$

$d(\text{senu}) =$ [ ]

$d(\text{senu} + C) =$ [ ]

cosu du

cosu du

61

$d(\text{senu} + C) = \text{cosu}\, du$

Tomando integrales de ambos miembros:

[ ]

De donde [ ]

$\int d(\text{senu} + C) = \int \text{cosu}\, du$

$\int \textbf{cosu}\, du = \textbf{senu} + \textbf{C}$

62

De manera similar:

2. $\dfrac{d(\text{cosu})}{dx} = -\,\text{senu} \cdot \dfrac{du}{dx}$

[ ]

[ ]

$d(\text{cosu}) = -\,\text{senu}\, du$

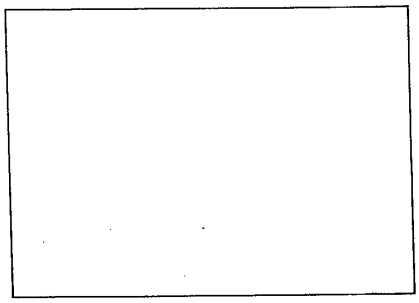
$d(\text{cosu} + C) = -\,\text{senu}\, du$

$\int d(\text{cosu} + C) = -\int \text{senu}\, du$

$\int \textbf{senudu} = -\,\textbf{cosu} + \textbf{C}$

63

3. $\dfrac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \cdot \dfrac{du}{dx}$



$d(\tan u) = \sec^2 u\,du$

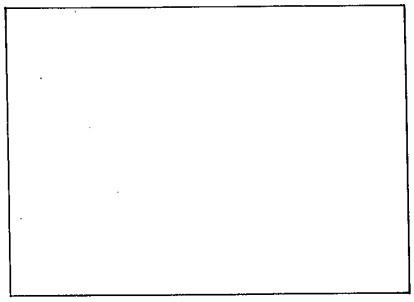
$d(\tan u + C) = \sec^2 u\,du$

$\int d(\tan u + C) = \int \sec^2 u\,du$

$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

64

4. $\dfrac{d(\cot u)}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot \dfrac{du}{dx}$



$d(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u\,du$

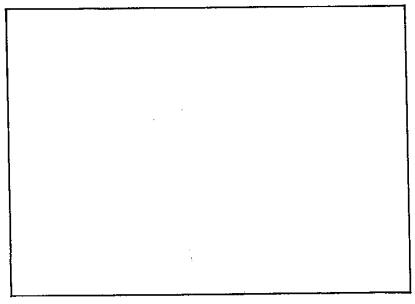
$d(\cot u + C) = -\operatorname{cosec}^2 u\,du$

$\int d(\cot u + C) = -\int \operatorname{cosec}^2 u\,du$

$\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\cot u + C$

65

5. $\dfrac{d(\sec u)}{dx} = \sec u \tan u \dfrac{du}{dx}$



$d(\sec u) = \sec u \tan u\,du$

$d(\sec u + C) = \sec u \tan u\,du$

$\int d(\sec u + C) = \int \sec u \tan u\,du$

$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

66

6. $\dfrac{d(\text{cosec}\,u)}{dx} = -\,\text{cosec}\,u\cot u\,\dfrac{du}{dx}$

$d(\text{cosec}\,u) = -\,\text{cosec}\,u\cot u\,du$

$d(\text{cosec}\,u + C) = -\,\text{cosec}\,u\cot u\,du$

$\int d(\text{cosec}\,u + C) = -\int \text{cosec}\,u\cot u\,du$

$\int \text{cosec}\,u\cot u\,du = -\,\text{cosec}\,u + C$

67

Resumen de las fórmulas obtenidas:

1. $\int \text{sen}\,u\,du = -\cos u + C$
2. $\int \cos u\,du = \text{sen}\,u + C$
3. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
4. $\int \text{cosec}^2 u\,du = -\cot u + C$
5. $\int \sec u\tan u\,du = \sec u + C$
6. $\int \text{cosec}\,u\cot u\,du = -\,\text{cosec}\,u + C$

68

Necesitamos
expresiones para:

- $\int \tan u\,du$
- $\int \cot u\,du$
- $\int \sec u\,du$
- $\int \text{cosec}\,u\,du$

69

$\int \tan u\,du = ?$

Escribamos la integral en esta forma:

$$\int \frac{\operatorname{sen} u\,du}{\cos u}$$

observamos que si introducimos una nueva variable **v** de manera que:

$$\cos u = v \quad \longleftarrow 1$$

tenemos por diferenciación:

$$\boxed{\qquad\qquad} = dv \quad \longleftarrow 2$$

$-\operatorname{sen} u\,du$

70

$\int \tan u\,du = ?$

$$\int \frac{\operatorname{sen} u\,du}{\cos u} = \int \frac{-\,dv}{v} = -\int \frac{dv}{v}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$-\ln|v| + C_1$

$-\ln|\cos u| + C$

71

Estudiar con atención. $\int \tan u\,du = ?$

$$\int \frac{\operatorname{sen} u\,du}{\cos u} = -\int \frac{dv}{v} = -\ln|v| + C_1 = -\ln|\cos u| + C$$

Y por la propiedad de los logaritmos:

$$\log_a \frac{n}{m} = \log_a n - \log_a m$$

podemos escribir:

$$= 0 - \ln|\cos u| + C$$

$$= \ln 1 - \ln|\cos u| + C$$

$$= \ln \frac{1}{\cos u} + C$$

$$= \ln|\sec u| + C$$

72

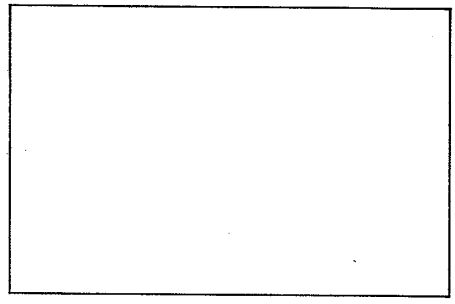
Obtenemos

$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$$

73

Similarmente:

$$\cot u\,du = ?$$



$$\int \cot u\,du = \int \frac{\cos u\,du}{\operatorname{sen} u}$$

$\operatorname{sen} u = v$ ← 1

$\cos u\,du = dv$ ← 2

$$\int \cot u\,du = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C_1$$

$$= \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

74

$$\int \sec u\,du = ?$$

Usemos el siguiente artificio:

Multipliquemos el integrando por esta expresión que es equivalente a la unidad: $\frac{\sec u + \tan u}{\sec u + \tan u}$

de donde resulta:

$$\int \sec u\,du = \int \frac{\sec u\,(\sec u + \tan u)\,du}{\sec u + \tan u}$$

o bien: $$\int \frac{(\sec^2 u + \sec u \tan u)\,du}{\sec u + \tan u}$$

75

$$\int \mathbf{secudu} = ?$$

$$\int \text{secudu} = \int \frac{(\sec^2 u + \text{secu tanu})\, du}{\text{tanu} + \text{secu}}$$

Observamos que el integrando tiene la forma $\frac{dz}{z}$;
por lo tanto, podemos escribir de acuerdo con
la regla $\int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C$:

$$\int \mathbf{secudu} = \mathbf{\ln|tanu + secu|} + \mathbf{C}$$

76

Similarmente,
intentemos
encontrar una
expresión para

$$\int \mathbf{cosecudu} = ?$$

$$\int \text{cosecudu} = \int \text{cosecu} \cdot \boxed{} \cdot du$$

$$= \int \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

$\frac{\text{cosecu} - \text{cotu}}{\text{cosecu} - \text{cotu}}$

$\frac{(\text{cosec}^2 u - \text{cosecucotu})du}{\text{cosecu} - \text{cotu}}$

↓

$\int \ln|\text{cosecu} - \text{cotu}| + C$

77

Tabla 2. Integrales trigonométricas elementales.

1. $\int \text{senudu} = -\text{cosu} + C$
2. $\int \text{cosudu} = \text{senu} + C$
3. $\int \text{tanudu} = \ln|\text{secu}| + C$
4. $\int \text{cotudu} = \ln|\text{senu}| + C$
5. $\int \text{secudu} = \ln|\text{secu} + \text{tanu}| + C$
6. $\int \text{cosecudu} = \ln|\text{cosecu} - \text{cotu}| + C$
7. $\int \sec^2 u du = \text{tanu} + C$
8. $\int \text{cosec}^2 u du = -\text{cotu} + C$
9. $\int \text{secutanudu} = \text{secu} + C$
10. $\int \text{cosecucotudu} = -\text{cosecu} + C$

8.3.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las fórmulas para
  las integrales trigonométricas elementales:

3.3

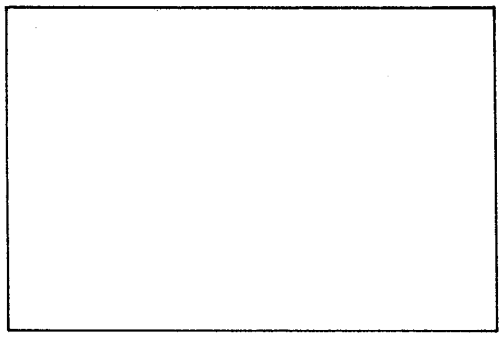
Integrales de las funciones trigonométricas —práctica—

78

$\int \operatorname{sen} x\,dx =$ _____

$\int \operatorname{sen} 2x\,dx =$ _____

Desarrollo:



- $-\cos x + C$
- $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$

Haciendo la sustitución:

$2x = u \longleftarrow 1$

$2dx = du$

$dx = \frac{du}{2} \longleftarrow 2$

obtenemos:

$$\int \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u\,du$$

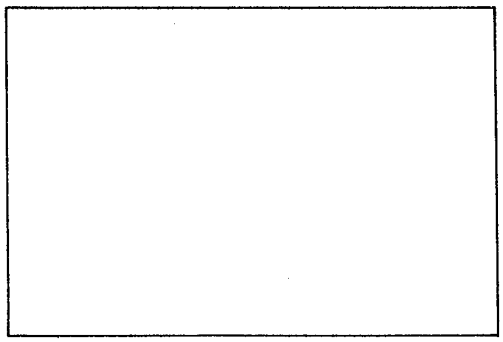
$$= -\frac{1}{2}\cos u + C_1$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

79

$\int \operatorname{sen} 3x\,dx =$ _____

Desarrollo:



$-\frac{1}{3}\cos 3x + C$

Haciendo el cambio de variable:

$3x = u \longleftarrow 1$

$3dx = du$

$dx = \frac{du}{3} \longleftarrow 2$

obtenemos:

$$\int \operatorname{sen} 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u\,du$$

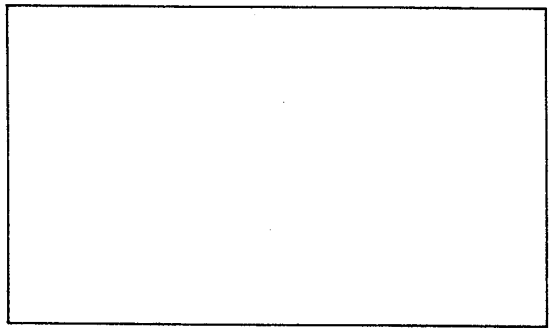
$$= -\frac{1}{3}\cos u + C_1$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

80

$\int \text{sen } ax\,dx =$ ⌊_____

Desarrollo:



$-\frac{1}{a}\cos ax + C$

Haciendo el cambio de variable:

$ax = u$ ← 1

$adx = du$

$dx = \frac{du}{a}$ ← 2

obtenemos:

$\int \text{sen}\,ax\,dx = \frac{1}{a}\int \text{sen}\,u\,du$

$= -\frac{1}{a}\cos u + C_1$

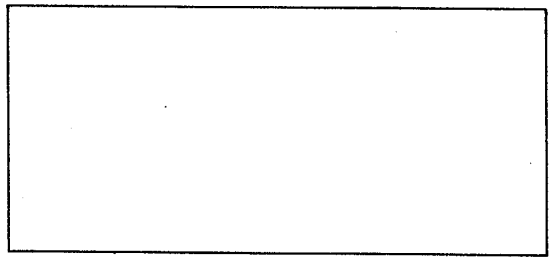
$= -\frac{1}{a}\cos ax + C$

81

$\int \cos x\,dx =$ ⌊_____

$\int \cos(x+2)\,dx =$ ⌊_____

Desarrollo:



sen x + C

sen (x + 2) + C

Haciendo el cambio de variable:

$x + 2 = u$ ← 1

$dx = du$ ← 2

obtenemos:

$\int \cos(x+2)\,dx = \int \cos u\,du$

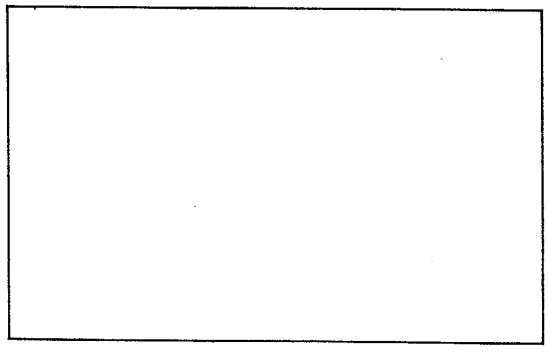
$= \text{sen}\,u + C_1$

$= \text{sen}\,(x+2) + C$

82

$\int \cos \frac{x}{2}\,dx =$ ⌊_____

Desarrollo:



2sen $\frac{x}{2}$ + C

Haciendo el cambio de variable

$\frac{x}{2} = u$ ← 1

$\frac{dx}{2} = du$

$dx = 2du$ ← 2

obtenemos:

$\int \cos \frac{x}{2}\,dx = 2\int \cos u\,du$

$= 2\text{sen}\,u + C_1$

$= 2\text{sen}\,\frac{x}{2} + C$

83

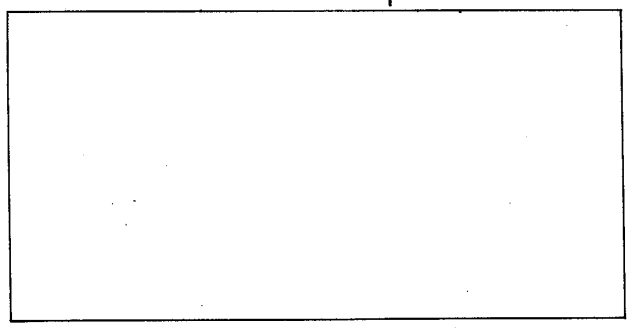
$\int \tan x\,dx =$ ____

$\ln|\sec x| + C$

84

$\int \tan(3x-2)\,dx =$ ____

Desarrollo:



$\frac{1}{3}\ln|\sec(3x-2)| + C$

Haciendo la sustitución:

$3x - 2 = u$ ← 1

$3dx = du$

$dx = \frac{du}{3}$ ← 2

obtenemos:

$\int \tan(3x-2)\,dx = \frac{1}{3}\int \tan u\,du$

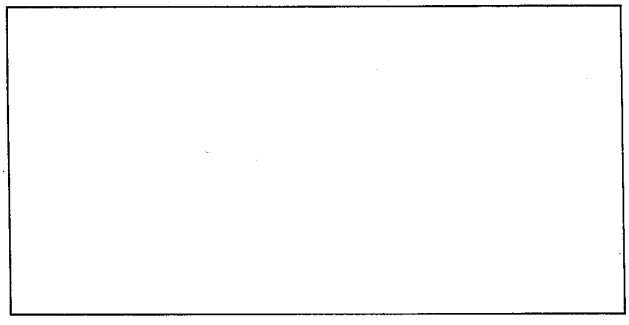
$= \frac{1}{3}\ln|\sec u| + C_1$

$= \frac{1}{3}\ln|\sec(3x-2)| + C$

85

$\int x\tan 3x^2\,dx =$ ____

Desarrollo:



$\frac{1}{6}\ln|\sec 3x^2| + C$

Haciendo el cambio de variable:

$3x^2 = u$ ← 1

$6xdx = du$

$xdx = \frac{du}{6}$ ← 2

obtenemos:

$\int x\tan 3x^2 dx = \frac{1}{6}\int \tan u\,du$

$= \frac{1}{6}\ln|\sec u| + C_1$

$= \frac{1}{6}\ln|\sec 3x^2| + C$

86

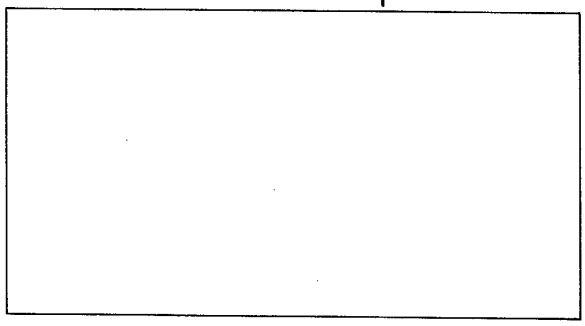
$\int \cot x\,dx =$ ____

$\ln|\operatorname{sen} x| + C$

87

$\int 3\cot(5x+1)\,dx =$ ____

Desarrollo:



$\frac{3}{5}\ln|\operatorname{sen}(5x+1)| + C$

Introduciendo la variable u tal que:

$5x + 1 = u$ ← 1

$5dx = du$

$dx = \frac{du}{5}$ ← 2

obtenemos:

$$\int 3\cot(5x+1)\,dx = \frac{3}{5}\int \cot u\,du$$

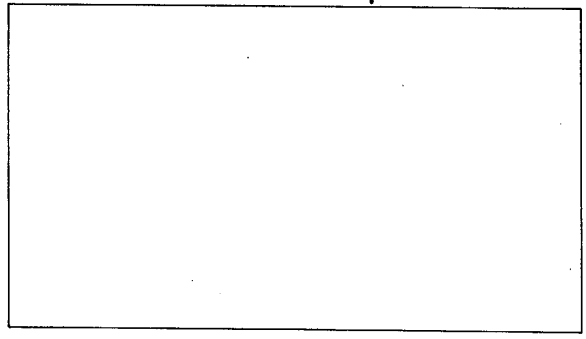
$$= \frac{3}{5}\ln|\operatorname{sen} u| + C_1$$

$$= \frac{3}{5}\ln|\operatorname{sen}(5x+1)| + C$$

88

$\int x^{n-1}\cot x^n\,dx =$ ____

Desarrollo:



$\frac{1}{n}\ln|\operatorname{sen} x^n| + C$

Mediante el cambio de variable:

$x^n = u$ ← 1

$nx^{n-1}dx = du$

$x^{n-1}dx = \frac{du}{n}$ ← 2

obtenemos:

$$\int x^{n-1}\cot x^n dx = \frac{1}{n}\int \cot u\,du$$

$$= \frac{1}{n}\ln|\operatorname{sen} u| + C_1$$

$$= \frac{1}{n}\ln|\operatorname{sen} x^n| + C$$

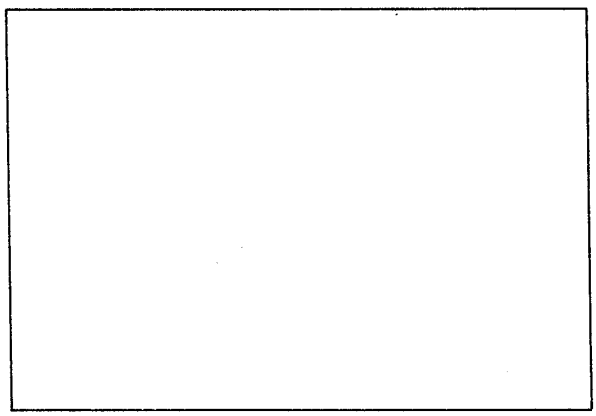
89

$\int \sec x\,dx = \square$

$\ln|\sec x + \tan x| + C$

90

$\int \sec \dfrac{3x+5}{2}\,dx = \square$



$\dfrac{2}{3}\ln\left|\sec\dfrac{3x+5}{2} + \tan\dfrac{3x+5}{2}\right| + C$

Efectuando el cambio de variable:

$\dfrac{3x+5}{2} = u \quad \longleftarrow 1$

$\dfrac{3}{2}\,dx = du$

$dx = \dfrac{2}{3}\,du \longleftarrow 2$

obtenemos:

$\int \sec \dfrac{3x+5}{2}\,dx = \dfrac{2}{3}\int \sec u\,du$

$= \dfrac{2}{3}\ln|\sec u + \tan u| + C_1$

$= \dfrac{2}{3}\ln\left|\sec\dfrac{3x+5}{2} + \tan\dfrac{3x+5}{2}\right| + C$

91

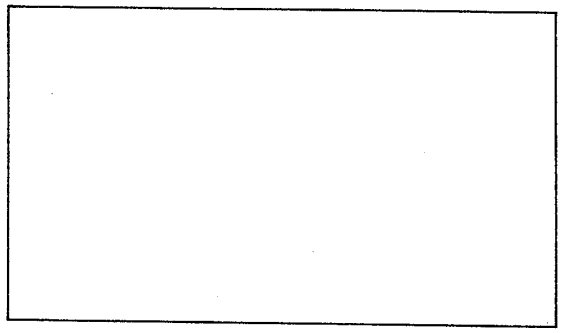
$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \square$

$\ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

92

$\int 5x\,\mathrm{cosec}\,x^2\,dx =$ ⌊ ⌋

Desarrollo:



$\frac{5}{2}\ln|\mathrm{cosec}\,x^2 - \cot x^2| + C$

Haciendo la sustitución:

$x^2 = u \longleftarrow 1$

$2x\,dx = du$

$x\,dx = \frac{du}{2} \longleftarrow 2$

obtenemos:

$\int 5x\,\mathrm{cosec}\,x^2\,dx = \frac{5}{2}\int \mathrm{cosec}\,u\,du$

$= \frac{5}{2}\ln|\mathrm{cosec}\,u - \cot u| + C_1$

$= \frac{5}{2}\ln|\mathrm{cosec}\,x^2 - \cot x^2| + C$

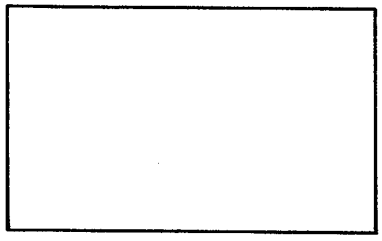
93

$\int \sec^2 x\,dx =$ ⌊ ⌋

$\tan x + C$

94

$\int \sec^2 (x-1)\,dx =$ ⌊ ⌋



ecuaciones de cambio de variable ⌊ ⌋

$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C_1$

Haciendo el cambio de variable:

$x - 1 = u \longleftarrow 1$

$dx = du \longleftarrow 2$

$\tan(x-1) + C \longleftarrow$

95

Atención.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

puesto que:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

96

$$\int \frac{dx}{\cos^2 (3x - 2)} = \boxed{\qquad\qquad}$$

Desarrollo:

$\frac{1}{3} \tan(3x - 2) + C$

Mediante la sustitución:

$3x - 2 = u$ ← **1**

$3dx = du$

$dx = \frac{du}{3}$ ← **2**

obtenemos:

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x-2)} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{1}{3}\int \sec^2 u\,du = \frac{1}{3}\tan u + C_1$$

$$= \frac{1}{3}\tan(3x - 2) + C$$

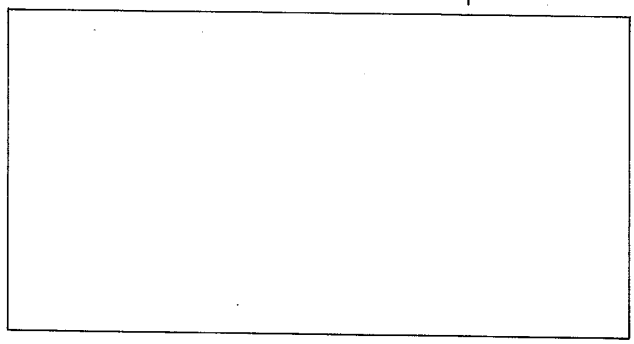
97

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = \boxed{\qquad\qquad}$$

$-\cot x + C$

98

$$\int x\,\mathrm{cosec}^2\,(x^2-3)\,dx = \square$$



$-\frac{1}{2}\cot(x^2-3)+C$

Efectuando el cambio de variable

$x^2-3=u$ ← 1

$2x\,dx=du$

$x\,dx=\frac{du}{2}$ ← 2

obtenemos:

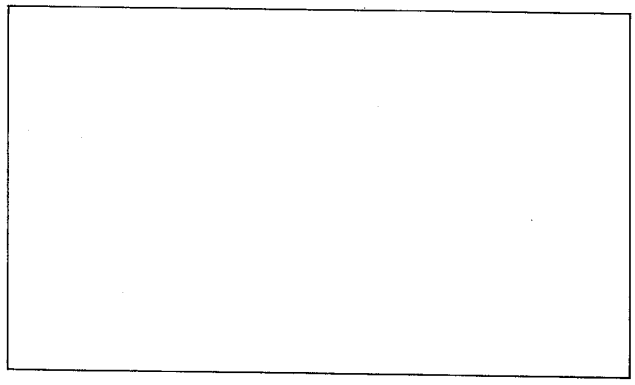
$$\int x\,\mathrm{cosec}^2(x^2-3)\,dx=\frac{1}{2}\int \mathrm{cosec}^2 u\,du$$

$$=-\frac{1}{2}\cot u + C_1$$

$$=-\frac{1}{2}\cot(x^2-3)+C$$

99

$$\int \frac{2x\,dx}{\mathrm{sen}^2\,(1-x^2)} = \square$$



$\cot(1-x^2)+C$

Introduciendo la nueva variable **u**, tal que:

$1-x^2=u$ ← 1

$-2x\,dx=du$

$2x\,dx=-du$ ← 2

obtenemos:

$$\int \frac{2x\,dx}{\mathrm{sen}^2(1-x^2)} = -\int \frac{du}{\mathrm{sen}^2 u}$$

$$=-\int \mathrm{cosec}^2 u\,du$$

$$=\cot u + C_1$$

$$=\cot(1-x^2)+C$$

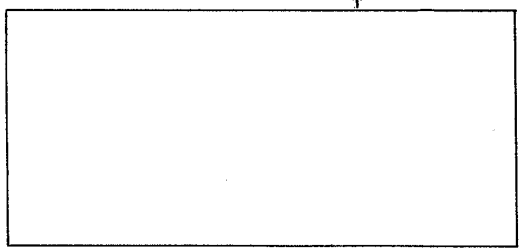
100

$$\int \sec x \tan x\,dx = \square$$

$\sec x + C$

101

$\int \sec(x-2)\tan(x-2)\,dx =$ ⌊ ⌋



$\sec(x-2)+C$

$x-2=u$ ← 1

$dx=du$ ← 2

$\int \sec(x-2)\tan(x-2)\,dx =$

$\int \sec u \tan u\,du$

$=\sec u + C_1 = \sec(x-2) + C$

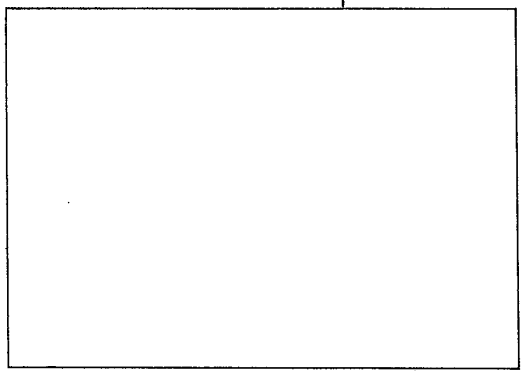
102

$\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx =$ ⌊ ⌋

$-\operatorname{cosec} x + C$

103

$\int \operatorname{cosec} \frac{x}{3} \cot \frac{x}{3}\,dx =$ ⌊ ⌋



$-3\operatorname{cosec} \frac{x}{3} + C$

$\frac{x}{3}=u$ ← 1

$\frac{dx}{3}=du$

$dx = 3du$ ← 2

$\int \operatorname{cosec} \frac{x}{3} \cot \frac{x}{3}\,dx$

$=3\int \operatorname{cosec} u \cot u\,du$

$=-3\operatorname{cosec} u + C_1$

$=-3\operatorname{cosec} \frac{x}{3} + C$

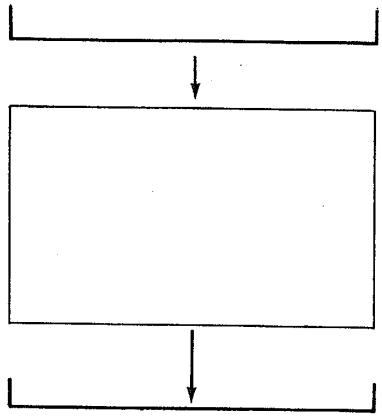
8.3.3.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

104

$\int (1 + \tan x)^2 dx =$

Intentemos resolver, desarrollando el binomio cuadrático del integrando:



$\int (1 + 2\tan x + \tan^2 x) dx$

Recordamos que:

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

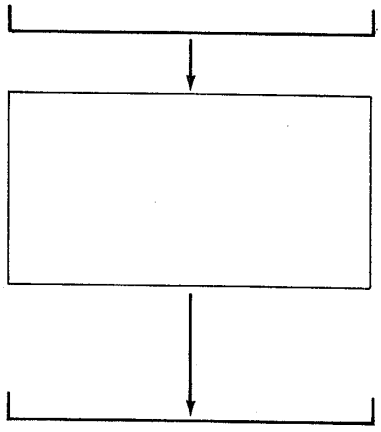
por lo tanto:

$\int (1 + \tan x)^2 dx$
$= 2 \int \tan x dx + \int \sec^2 x dx$

$= 2\ln|\sec x| + \tan x + C$

105

$\int (\cot x + 1)^2 dx =$



$\int (\cot^2 x + 2\cot x + 1) dx$

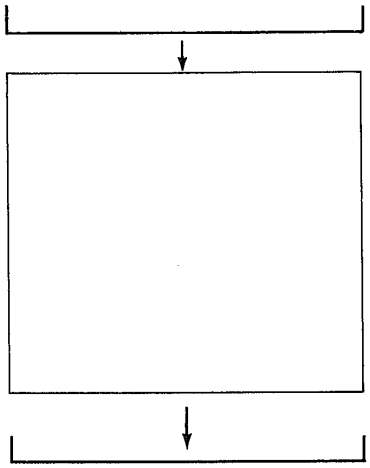
puesto que: $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$

$\int (\cot x + 1)^2 dx$
$= \int \operatorname{cosec}^2 x dx + 2 \int \cot x dx$

$= -\cot x + 2\ln|\operatorname{sen} x| + C$

106

$$\int (\sec x - \tan x)^2\,dx = \square$$



$\int (\sec^2 x - 2\sec x \tan x + \tan^2 x)\,dx$

puesto que:

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$\int (\sec x - \tan x)^2 dx$

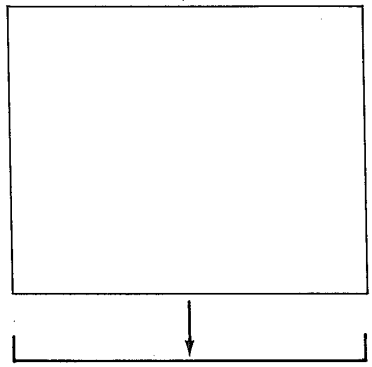
$= \int \sec^2 x\,dx - 2\int \sec x \tan x\,dx + \int \sec^2 x\,dx - \int dx$

$= 2\int \sec^2 x\,dx - 2\int \sec x \tan x\,dx - \int dx$

$= \mathbf{2\tan x - 2\sec x - x + C}$

107

$$\int (\operatorname{cosec} x + \cot x)^2\,dx = \square$$



$\int (\operatorname{cosec}^2 x + 2\operatorname{cosec} x \cot x + \cot^2 x)\,dx$

pero como:

$\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$

$\int (\operatorname{cosec} x + \cot x)^2 dx$

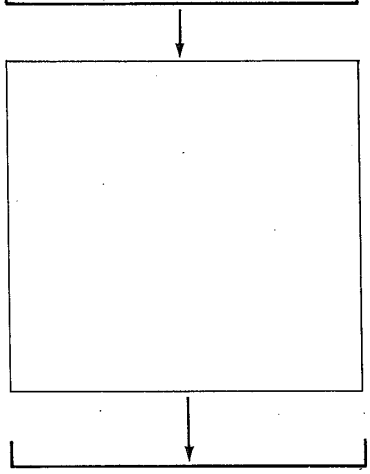
$= \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx + 2\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int dx$

$= 2\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx + 2\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx - \int dx$

$= \mathbf{-2\cot x - 2\operatorname{cosec} x - x + C}$

108

$$\int (\tan x - \cot x)^2\,dx = \square$$



$\int (\tan^2 x - 2\tan x \cot x + \cot^2 x)\,dx$

Como:

- $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
- $\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$
- $\tan x \cot x = 1$

$= \int \sec^2 x\,dx - \int dx - 2\int dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int dx$

o bien:

$= \int \sec^2 x\,dx - 4\int dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx$

$= \tan x - 4x - \cot x + C$

o bien:

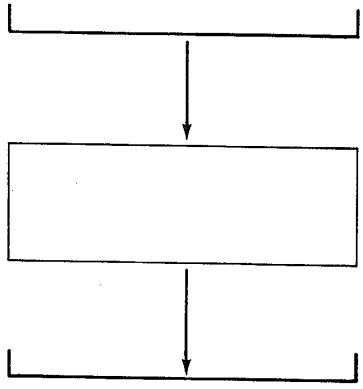
$\mathbf{\tan x - \cot x - 4x + C}$

109

Atención.

$\int \text{sen}^2 x \cos x\,dx =$ ⌊ ⌋

Intento de cambio de variable



$\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C_1$

Haciendo

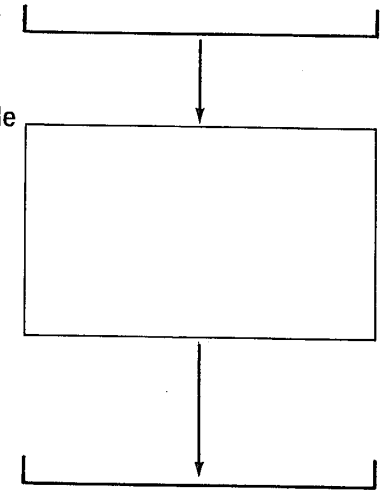
$\text{sen}x = u \leftarrow 1$

$\cos x\,dx = du \leftarrow 2$

$\frac{\text{sen}^3 x}{3} + C$ ←

$\int \sec^2 x \tan x\,dx =$ ⌊ ⌋

Ecuaciones de cambio de variable



$\int \sec x \cdot \sec x \tan x\,dx$

y haciendo:

$\sec x = u \leftarrow 1$

$\sec x \tan x\,dx = du \leftarrow 2$

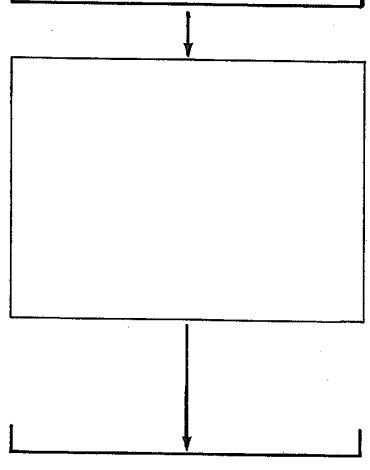
$= \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C_1$

$= \frac{\sec^2 x}{2} + C$

111

$\int \text{cosec}^2 3x \cot 3x\,dx =$ ⌊ ⌋

Ecuaciones de cambio de variable



$\int \text{cosec}3x \cdot \text{cosec}3x \cot 3x\,dx$

y haciendo:

$\text{cosec}3x = u \leftarrow 1$

$-3\text{cosec}3x \cot 3x\,dx = du$

$\text{cosec}3x \cot 3x\,dx = -\frac{du}{3} \leftarrow 2$

$= -\frac{1}{3}\int u\,du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{u^2}{2} + C_1$

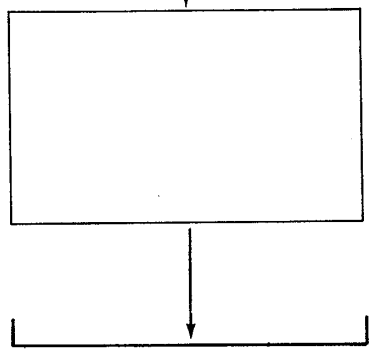
$= -\frac{u^2}{6} + C_1$

$= -\frac{\text{cosec}^2 3x}{6} + C$

112

$\int (\tan x \sec x)^2 dx =$ ⌊ ⌋

Ecuaciones de cambio de variable:



$\int \tan^2 x \sec^2 x dx$

y haciendo:

$\tan x = u \quad \leftarrow 1$

$\sec^2 x dx = du \quad \leftarrow 2$

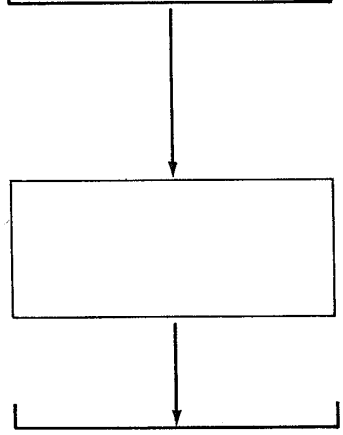
$= \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C_1$

$= \frac{\tan^3 x}{3} + C$

113

$\int \tan^5 (2x-1) \sec^2 (2x-1) dx =$ ⌊ ⌋

Ecuaciones de cambio de variable:



$\frac{1}{2} \int u^5 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^6}{6} + C_1$

$= \frac{u^6}{12} + C_1$

Haciendo:

$\tan(2x-1) = u \quad \leftarrow 1$

$2\sec^2(2x-1) dx = du$

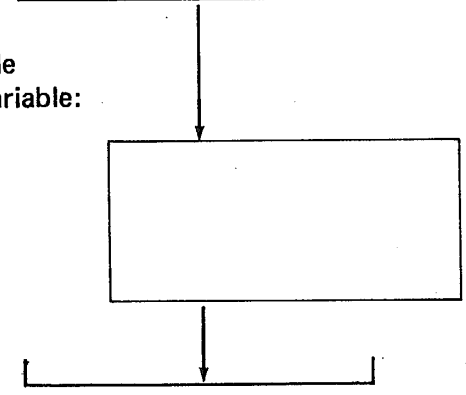
$\sec^2(2x-1) dx = \frac{du}{2} \quad \leftarrow 2$

$= \frac{\tan^6(2x-1)}{12} + C$

114

$\int \frac{\text{sen}\, x dx}{1+\cos x} =$ ⌊ ⌋

Ecuaciones de cambio de variable:



$-\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C_1$

Haciendo

$1 + \cos x = u \quad \leftarrow 1$

$-\text{sen}\, x dx = du$

$\text{sen}\, x dx = -du \quad \leftarrow 2$

$= -\ln|1 + \cos x| + C$

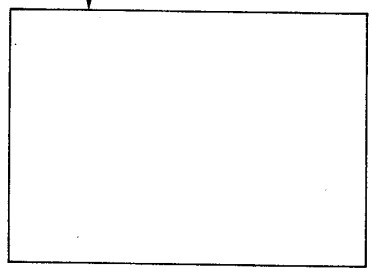
115

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = ?$$

116

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Si multiplicamos y dividimos el integrando por el binomio conjugado del denominador y transformamos la expresión resultante obtenemos dos integrales que podemos resolver:



$$\int \frac{(1 - \cos x)\,dx}{(1 + \cos x)\,(1 - \cos x)}$$

$$= \int \frac{(1 - \cos x)\,dx}{1 - \cos^2 x}$$

y como $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$

$$= \int \frac{(1 - \cos x)\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} - \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$$

o bien

$$= \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int \operatorname{sen}^{-2} x \cos x\,dx$$

117

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int \operatorname{sen}^{-2} x \cos x\,dx$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$-\cot x + \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

o bien

$$-\cot x + \operatorname{cosec} x + C$$

o bien

$$\operatorname{cosec} x - \cot x + C$$

118

Similarmente,

$$\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x} = \boxed{\qquad\qquad}$$

Integral transformada: $\boxed{\qquad\qquad}$

$$\int \frac{(1+\operatorname{sen} x)\,dx}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}$$

$$\int \frac{(1+\operatorname{sen} x)\,dx}{1-\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\int \frac{(1+\operatorname{sen} x)\,dx}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x}$$

$$\int \sec^2 x\,dx + \int \cos^{-2} x \operatorname{sen} x\,dx$$

119

$$\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x} = \int \sec^2 x\,dx + \int \cos^{-2} x \operatorname{sen} x\,dx$$

Atención.

$$= \int \sec^2 x\,dx - \int \cos^{-2} x\,(-\operatorname{sen} x\,dx)$$

$\boxed{\qquad\qquad}$

$$\tan x + \cos^{-1} x + C$$

$$\tan x + \frac{1}{\cos x} + C$$

$\tan x + \sec x + C$

8.3.3.2

Práctica adicional,
si se considera necesario.

8.3.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* integrales trigonométricas que pueden ser llevadas a algunas de las formas contenidas en las tablas 1 y 2, mediante transformaciones trigonométricas o cambios de variable.

3.4

Integrales de funciones trigonométricas inversas

120

Escribamos las 6 fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas:

1. $$\frac{d(\text{Arcsen}v)}{dx} = \frac{dv/dx}{\sqrt{1-v^2}} \quad (-1 < v < 1)$$

2. $$\frac{d(\text{Arccos}v)}{dx} = -\frac{dv/dx}{\sqrt{1-v^2}} \quad (-1 < v < 1)$$

3. $$\frac{d(\text{Arctan}v)}{dx} = \frac{dv/dx}{1+v^2} \quad (v \in \mathbb{R})$$

4. $$\frac{d(\text{Arccot}v)}{dx} = -\frac{dv/dx}{1+v^2} \quad (v \in \mathbb{R})$$

5. $$\frac{d(\text{Arcsec}v)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{dv/dx}{v\sqrt{v^2-1}} & (\text{si } v > 1) \\ -\dfrac{dv/dx}{v\sqrt{v^2-1}} & (\text{si } v < -1) \end{cases}$$

6. $$\frac{d(\text{Arccosec}v)}{dx} = \begin{cases} -\dfrac{dv/dx}{v\sqrt{v^2-1}} & (\text{si } v > 1) \\ \dfrac{dv/dx}{v\sqrt{v^2-1}} & (\text{si } v < -1) \end{cases}$$

121

Tomemos la fórmula **1**:

$$\frac{d(\text{Arcsen}v)}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$$

Si $v = \frac{u}{a}$ $\quad \frac{d(\text{Arcsen } u/a)}{dx} =$ [ ]

Expresión simplificada: [ ]

- $\dfrac{\frac{1}{a} \cdot \frac{du}{dx}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}$
- $\dfrac{\frac{du}{adx}}{\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a}} = \dfrac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{a^2-u^2}}$

122

$$\frac{d(\text{Arcsen } u/a)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$\dfrac{d(\text{Arcsen } u/a + C)}{dx} =$ [ ]

$d(\text{Arcsen } u/a + C) =$ [ ]

$\dfrac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{a^2-u^2}}$

$\dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$

123

$$d(\text{Arcsen } u/a + C) = \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

De donde:

$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} =$ [ ]

$\int d(\text{Arcsen } u/a + C)$

= Arcsen u/a + C

124

De la fórmula **2** :

$$\frac{d(\text{Arccos}v)}{dx} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}$$

Haciendo $v = \frac{u}{a}$:

$$\frac{d\left(\text{Arccos}\,\frac{u}{a}\right)}{dx} = \boxed{\qquad}$$

Expresión simplificada: $\boxed{\qquad}$

- $-\dfrac{\frac{1}{a}\cdot\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}$
- $-\dfrac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{a^2-u^2}}$

125

$$\frac{d\left(\text{Arccos}\,\frac{u}{a}\right)}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$\frac{d\left(\text{Arccos}\,\frac{u}{a}+C\right)}{dx} = \boxed{\qquad}$$

$$d\left(\text{Arccos}\,\frac{u}{a}+C\right) = \boxed{\qquad}$$

- $-\dfrac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{a^2-u^2}}$
- $-\dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$

126

$$d\left(\text{Arccos}\,\frac{u}{a}+C\right) = -\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

De donde:

$$-\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \boxed{\qquad}$$

o bien

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \boxed{\qquad}$$

- $\text{Arccos}\,\frac{u}{a}+C$
- $-\text{Arccos}\,\frac{u}{a}+C$

127

Obtenemos:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{Arcsen } \frac{u}{a} + C$$

y

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\text{Arccos } \frac{u}{a} + C$$

128

Veamos otro procedimiento para obtener las fórmulas del cuadro anterior.

129

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ?$$

Consideremos el triángulo rectángulo ABC en que:

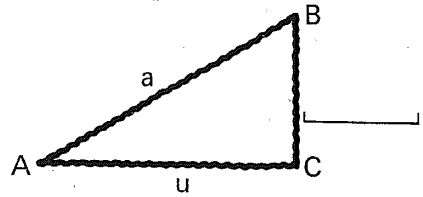
$|\overrightarrow{AB}| = a$

$|\overrightarrow{AC}| = u$

y

$|\overrightarrow{BC}| =$ ⌊_____⌋

de acuerdo con Pitágoras.



- $\sqrt{a^2 - u^2}$
- $\sqrt{a^2 - u^2}$

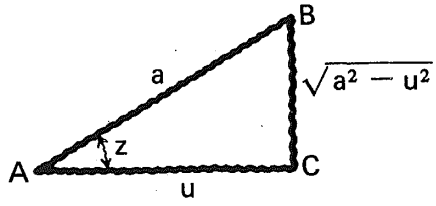
130

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ?$$

Llamemos z a la medida del ángulo BAC:

Entonces:

$$\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} = \text{senz}$$



de donde

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \underline{\qquad}$$

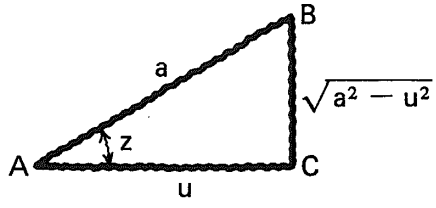
asenz

131

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ?$$

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \text{asenz}$$

$$u = \underline{\qquad}$$



acosz

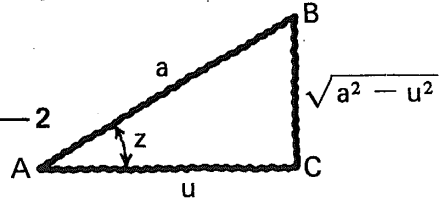
132

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ?$$

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \text{asenz} \quad \longleftarrow 1$$

$$u = \text{acosz}$$

$$du = \underline{\qquad} \quad \longleftarrow 2$$



$-\text{asenzdz}$

133

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ?$$

$\sqrt{a^2 - u^2} = a\,\text{sen}\,z$ ← 1

$u = a\cos z$

$du = -a\,\text{sen}\,z\,dz$ ← 2

} ecuaciones de cambio de variable

Reescribiendo la integral dada en términos de z y simplificando, tenemos:

$$-\int \frac{a\,\text{sen}\,z\,dz}{a\,\text{sen}\,z} = \boxed{\quad}$$

$-\int dz$

134

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\int dz = \boxed{\quad}$$

Resultado, en términos de z

$-z + C_1$

135

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\int dz = -z + C_1$$

$\sqrt{a^2 - u^2} = a\,\text{sen}\,z$ ← 1

$u = a\cos z$

$du = -a\,\text{sen}\,z\,dz$ ← 2

Resultado, en términos de la variable original (u): $\boxed{\quad}$

Puesto que:

$\cos z = \frac{u}{a}$

$z = \text{Arccos}\,\frac{u}{a}$

$-\text{Arccos}\,\frac{u}{a} + C$

136

Obtenemos:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\operatorname{Arccos} \frac{u}{a} + C$$

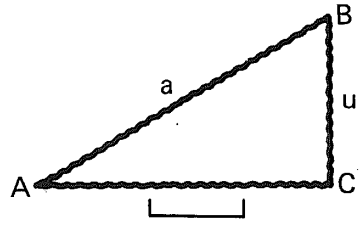
Para deducir la otra fórmula, consideremos el triángulo rectángulo ABC y hagamos:

$|\overrightarrow{AB}| = a$

$|\overrightarrow{BC}| = u$

por lo que

$|\overrightarrow{AC}| =$ [ ]



$\sqrt{a^2 - u^2}$

$\sqrt{a^2 - u^2}$

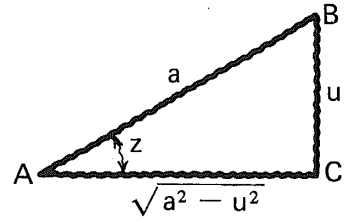
137

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ?$$

$\sqrt{a^2 - u^2} =$ [ ]

$u =$ [ ]

$du =$ [ ]



acosz

asenz

acoszdz

138

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ?$$

$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos z$ ← 1

$u = a\operatorname{sen} z$

$du = a\cos z\,dz$ ← 2

Escribiendo la integral en términos de z:

$$\int \frac{a\cos z\,dz}{a\cos z} =$$ [ ]

$\int dz$

139

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \int dz = \square$$

Resultado en términos de z

Resultado en términos de u

$z + C_1$

$\text{Arcsen } \frac{u}{a} + C$

140

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \text{Arcsen } \frac{u}{a} + C \\ -\text{Arccos } \frac{u}{a} + C \end{cases}$$

Las dos expresiones podrán ser usadas indistintamente.

141

Este método de
sustitución trigonométrica
puede ser usado
como un procedimiento general
para la integración
de expresiones conteniendo

$\sqrt{a^2 - u^2}$ $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ $a^2 - u^2$ $u^2 \pm a^2$

142

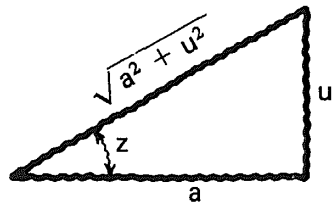
Veamos.

$$\int \frac{du}{a^2 \pm u^2} = ?$$

$a^2 + u^2 =$ ⌊_____⌋

$u =$ ⌊_____⌋

$du =$ ⌊_____⌋



$a^2 \sec^2 z$

$a \tan z$

$a \sec^2 z\, dz$

143

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \text{⌊\_\_\_\_\_⌋}$$

⌊_____⌋

$a^2 + u^2 = a^2 \sec^2 z$ ← 1

$u = a \tan z$

$du = a^2 \sec^2 z\, dz$ ← 2

} ecuaciones de cambio de variable

⌊_____⌋

$$\int \frac{a^2 \sec^2 z\, dz}{a^2 \sec^2 z} = \int dz$$

$$= z + C_1$$

$$\textbf{Arctan} \frac{u}{a} + C$$

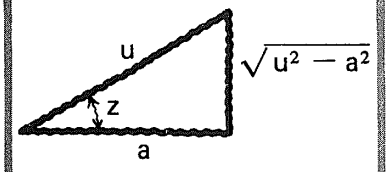
144

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \textbf{Arctan} \frac{u}{a} + C \qquad \frac{u}{a} \in \mathbb{R}$$

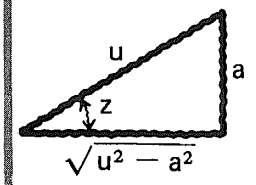
145

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = ?$$

Triángulo rectángulo auxiliar para cambio de variable.



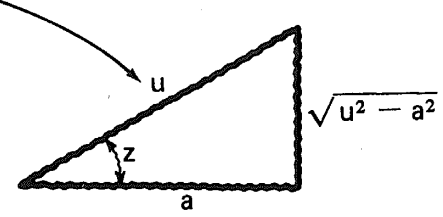
o bien:



146

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = ?$$

Considerando el triángulo



ecuaciones de cambio de variable

$\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan z$ ← **1**

$u = a\sec z$ ← **2**

$du = a\sec z\tan z dz$ ← **3**

147

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \square$$

$\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan z$ ← **1**

$u = a\sec z$ ← **2**

$du = a\sec z\tan z dz$ ← **3**

En términos de z: $\square$

En términos de u: $\square$

$$\int \frac{a\sec z\tan z dz}{a\sec z \cdot a\tan z} = \frac{1}{a}\int dz$$

$\frac{z}{a} + C_1$

$\frac{1}{a}\,\text{Arcsec}\,\frac{u}{a} + C$

148

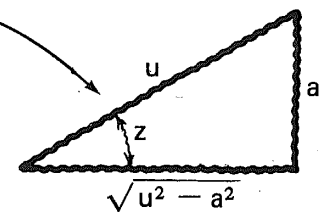
$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcsec} \frac{u}{a} + C$$

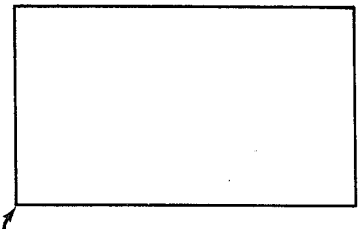
149

La misma integral

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = ?$$

Considerando el triángulo





ecuaciones de cambio de variable

$\sqrt{u^2 - a^2} = a\cot z$ ← 1

$u = a\operatorname{cosec} z$ ← 2

$du = -a\operatorname{cosec} z \cot z\, dz$ ← 3

150

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \boxed{\qquad}$$

$\sqrt{u^2 - a^2} = a\cot z$ ← 1

$u = a\operatorname{cosec} z$ ← 2

$du = -a\operatorname{cosec} z \cot z\, dz$ ← 3

En términos de z: $\boxed{\qquad}$

En términos de u: $\boxed{\qquad}$

$$-\int \frac{a\operatorname{cosec} z \cot z\, dz}{a\operatorname{cosec} z \cdot a\cot z} = -\frac{1}{a}\int dz$$

$$-\frac{z}{a} + C_1$$

$$-\frac{1}{a} \operatorname{Arccosec} \frac{u}{a} + C$$

151

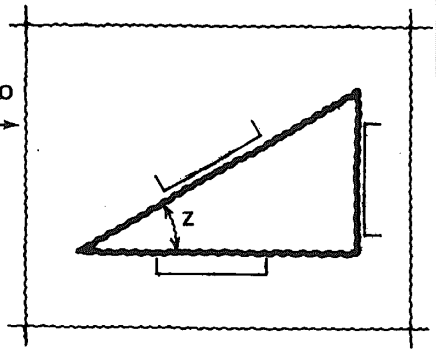
$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \begin{cases} \frac{1}{a}\,\text{Arcsec}\,\frac{u}{a} + C \\ -\frac{1}{a}\,\text{Arccosec}\,\frac{u}{a} + C \end{cases}$$

Los dos resultados pueden ser usados indistintamente.

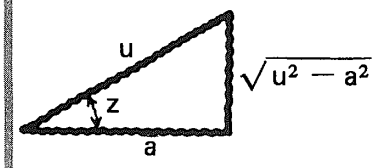
152

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = ?$$

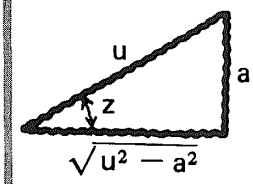
Triángulo auxiliar para cambio de variable



Rotular donde se requiere.



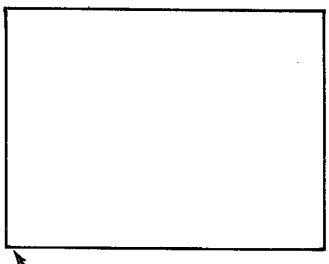
o



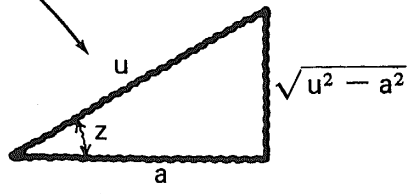
153

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = ?$$

Considerando el triángulo



ecuaciones de cambio de variable



$u^2 - a^2 = a^2\tan^2 z$ ← 1

$u = a\sec z$

$du = a\sec z \tan z\, dz$ ← 2

154

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$u^2 - a^2 = a^2 \tan^2 z$ ← 1

$u = a\sec z$

$du = a\sec z \tan z\, dz$ ← 2

Resultado en términos de z: $\boxed{\qquad\qquad}$

En términos de u: $\boxed{\qquad\qquad}$

Respuesta en el cuadro siguiente.

Integral en términos de z:

$$\int \frac{a\sec z \tan z\, dz}{a^2 \tan^2 z} = \frac{1}{a}\int \frac{\sec z\, dz}{\tan z}$$

Haciendo la transformación trigonométrica del integrando:

$$\frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{\cos z}\, dz}{\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}} = \frac{1}{a}\int \operatorname{cosec} z\, dz$$

Resultado en términos de z:

$$\frac{1}{a}\ln|\operatorname{cosec} z - \cot z| + C_1$$

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}} - \frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}}\right| + C$$

$$\frac{1}{a}\ln\frac{u - a}{\sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

o bien:

$$\frac{1}{a}\ln\sqrt{\frac{(u-a)^2}{u^2 - a^2}} + C$$

$$\frac{1}{a}\ln\sqrt{\frac{(u-a)(u-a)}{(u+a)(u-a)}} + C$$

$$\frac{1}{a}\ln\sqrt{\frac{u-a}{u+a}} + C$$

Resultado final en términos de u:

$$\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

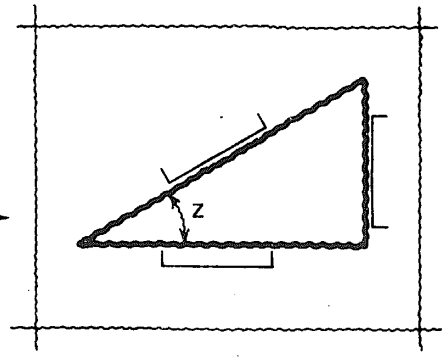
155

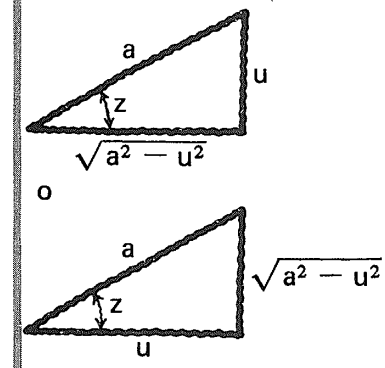
$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

156

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = ?$$

Triángulo auxiliar para cambio de variable →

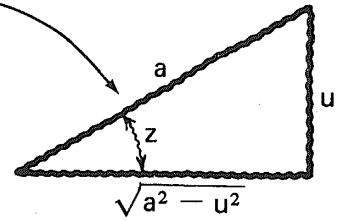




157

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = ?$$

Considerando el triángulo →



ecuaciones de cambio de variable

$$a^2 - u^2 = a^2\cos^2 z \leftarrow 1$$

$$u = a\,\text{sen}\,z$$

$$du = a\cos z\,dz \leftarrow 2$$

158

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$a^2 - u^2 = a^2\cos^2 z \leftarrow 1$$

$$u = a\,\text{sen}\,z$$

$$du = a\cos z\,dz \leftarrow 2$$

Resultado en términos de z: $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

En términos de u: $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$$\int \frac{a\cos z\,dz}{a^2\cos^2 z} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{\cos z} = \frac{1}{a}\int \sec z\,dz$$

- $\frac{1}{a}\ln|\sec z + \tan z| + C_1$

$$\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{\sqrt{a^2 - u^2}} + \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}\right| + C$$

- $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C$

159

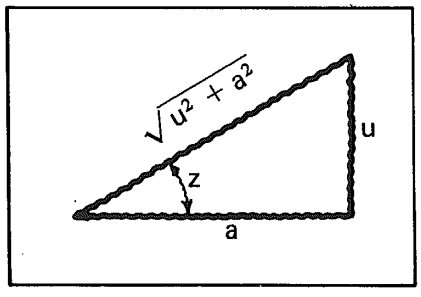
$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$$

160

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \boxed{\qquad\qquad}$$

triángulo auxiliar y ecuaciones de cambio de variable.

Respuesta en el cuadro siguiente.



$\sqrt{a^2 + a^2} = a\sec z$ ← 1

$u = a\tan z$

$du = a\sec^2 z\,dz$ ← 2

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \int \frac{a\sec^2 z\,dz}{a\sec z} = \int \sec z\,dz$$

$$= \ln|\sec z + \tan z| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{a} + \frac{u}{a}\right| + C_2$$

$$= \ln\left|\frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a}\right| + C_2$$

$$= \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| \underbrace{- \ln|a| + C_2}_{C}$$

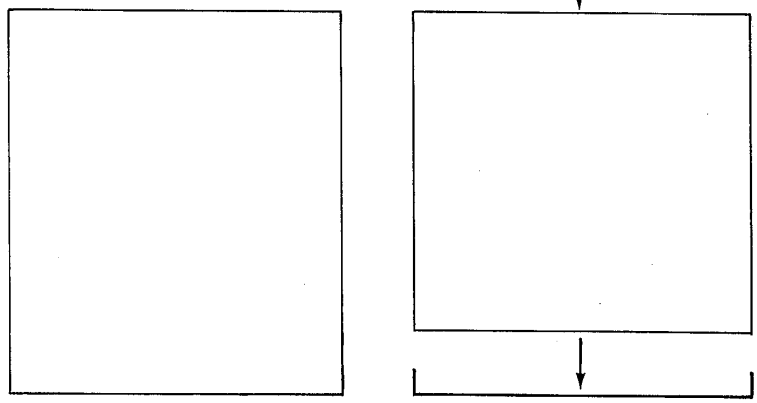
$$= \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$$

161

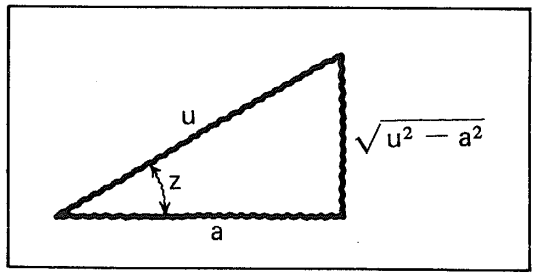
$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C$$

162

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \boxed{\qquad\qquad}$$



Respuesta en el cuadro siguiente.



$$\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan z \quad \leftarrow 1$$
$$u = a\sec z$$
$$du = a\sec z\tan z\, dz \quad \leftarrow 2$$

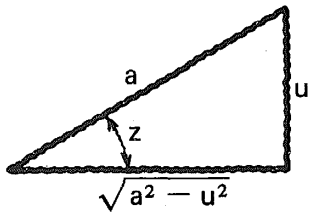
$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \int \frac{a\sec z\tan z\, dz}{a\tan z} = \int \sec z\, dz$$

$$= \ln|\sec z + \tan z| + C_1$$
$$= \ln\left|\frac{u}{a} + \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a}\right| + C_1$$
$$= \ln\left|\frac{u + \sqrt{u^2 - a^2}}{a}\right| + C_1$$
$$= \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| - \underbrace{\ln|a| + C_1}_{C}$$
$$= \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

163

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du =$$

Respuesta en el cuadro siguiente.



$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos z$ ←1

$u = a\,\text{sen}\,z$

$du = a\cos z\,dz$ ←2

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = a^2 \int \cos^2 z\, dz$$

Recordando que podemos escribir:

$$\cos^2 z = \frac{1 + \cos 2z}{2}$$

$$a^2 \int \cos^2 z\, dz = \frac{a^2}{2} \int dz + \frac{a^2}{2} \int \cos 2z\, dz$$

$$= \frac{a^2 z}{2} + \frac{a^2}{4} \,\text{sen}\, 2z + C_1$$

$$= \frac{a^2 z}{2} + \frac{a^2}{2} \,\text{sen}\, z \cos z + C_1$$

$$= \frac{a^2}{2} \,\text{Arcsen}\, \frac{u}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{u}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} + C$$

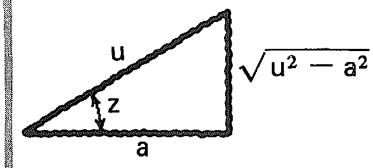
$$= \frac{a^2}{2} \,\text{Arcsen}\, \frac{u}{a} + \frac{u\sqrt{a^2 - u^2}}{2} + C$$

164

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u\sqrt{a^2 - u^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \,\text{Arcsen}\, \frac{u}{a} + C$$

165

$\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du =$



$\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan z$ ← 1

$u = a\sec z$

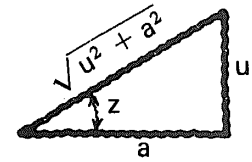
$du = a\sec z\tan z\, dz$ ← 2

$\int \sqrt{u^2 - a^2} = a^2 \int \tan^2 z \sec z\, dz$

No podemos dar el resultado de esta integral con los conocimientos que en este momento tenemos.

166

$\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du =$



$\sqrt{u^2 + a^2} = a\sec z$

$u = a\tan z$ ← 1

$du = a\sec^2 z\, dz$ ← 2

$\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du$

$= \int a\sec z \cdot a\sec^2 z\, dz$

$= a^2 \int \sec^3 z\, dz$

No nos es posible, por el momento, dar el resultado de esta integral.

167

En el módulo siguiente desarrollaremos métodos para resolver integrales como éstas:

$$\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = a^2 \int \tan^2 z \sec z\, dz$$

$$\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = a^2 \int \sec^3 z\, dz$$

Tabla 3. Integrales de funciones conteniendo expresiones de las formas:

$\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{u^2 \pm a^2}$, $a^2 - u^2$ o $u^2 \pm a^2$

1. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{Arcsen } \frac{u}{a} + C$$

2. $$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \text{ Arctan } \frac{u}{a} + C$$

3. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{ Arcsec } \frac{u}{a} + C$$

4. $$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$$

5. $$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + u}{a - u} \right| + C$$

6. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$$

7. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

8. $$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \text{ Arcsen } \frac{u}{a} + C$$

8.3.4.1

Práctica adicional de integración de funciones conteniendo expresiones de alguna de las formas:

$\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{u^2 \pm a^2}$, $a^2 - u^2$, $u^2 \pm a^2$

por sustitución trigonométrica, si se considera necesario.

8.3.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *integrar* algunas funciones conteniendo expresiones de las formas:

  $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{u^2 \pm a^2}$, $a^2 - u^2$ o $u^2 \pm a^2$

  por el método de sustitución trigonométrica.

3.5

Integrales de funciones exponenciales

169

Recordemos estas dos reglas para diferenciar funciones exponenciales:

$$\frac{d(e^u)}{dx} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{d(a^u)}{dx} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$e^u \dfrac{du}{dx}$

$\ln a \cdot a^u \cdot \dfrac{du}{dx}$

170

De la primera fórmula:

$$\frac{d(e^u)}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(e^u + C)}{dx} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$d(e^u + C) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$e^u \dfrac{du}{dx}$

$e^u du$

171

$e^u\,du = d(e^u + C)$

Integrando ambos miembros se tiene:

[ ]

$\int e^u\,du = e^u + C$

172

De $\dfrac{d(a^u)}{dx} = \ln a \cdot a^u \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d(a^u + C)}{dx} =$ [ ]

$d(a^u + C) =$ [ ]

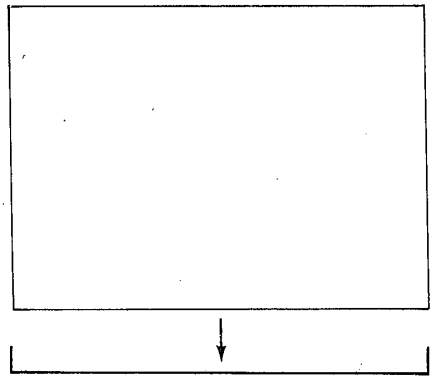
$\ln a \cdot a^u \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\ln a \cdot a^u \cdot du$

173

$\ln a \cdot a^u \cdot du = d(a^u + C)$

Integrando ambos miembros:



$\ln a \int a^u\,du = a^u + C_1$

de donde

$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + \dfrac{C_1}{\ln a}\,C$

$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

174

Tabla 4. Integrales de funciones exponenciales

1. $\int e^u du = e^u + C$

2. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad a > 0 \wedge a \neq 1$

175

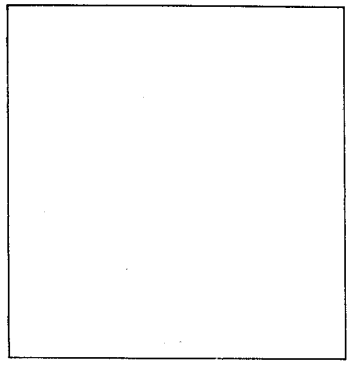
$\int e^x dx =$ _____

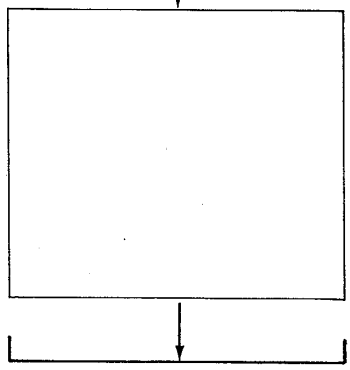
$e^x + C$

176

$\int e^{3x} dx =$ _____

Cambio de variable:





$\frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C_1$

$3x = u \leftarrow 1$

$3dx = du$

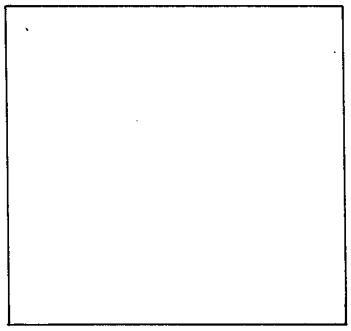
$dx = \frac{du}{3} \leftarrow 2$

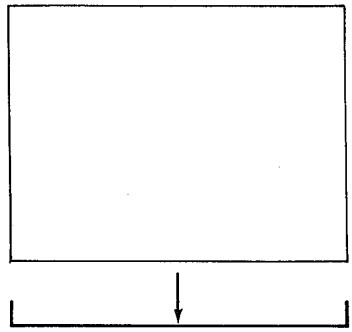
$\frac{1}{3} e^{3x} + C$

177

$\int 5e^{-2x}\,dx =$ ⌊ ⌋

Ecuaciones de cambio de variable:





$-\frac{5}{2}\int e^u du = -\frac{5}{2}\,e^u + C_1$

$-2x = u$ ← 1

$-2dx = du$

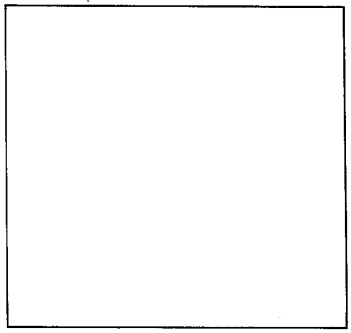
$dx = -\frac{du}{2}$ ← 2

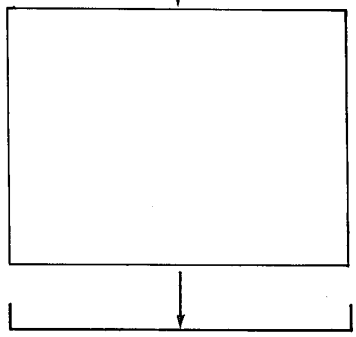
$-\frac{5}{2}\,e^{-2x} + C$

178

$\int 6e^{2x+3}\,dx =$ ⌊ ⌋

Ecuaciones de cambio de variable:





$3\int e^u du = 3e^u + C_1$

$2x + 3 = u$ ← 1

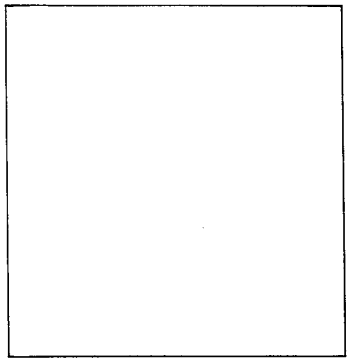
$2dx = du$

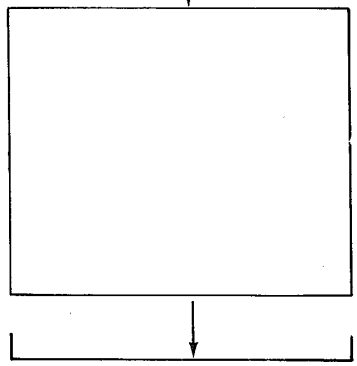
$dx = \frac{du}{2}$ ← 2

$3e^{2x+3} + C$

179

$\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} =$ ⌊ ⌋





$2\int e^u du = 2e^u + C_1$

$\sqrt{x} = u$ ← 1

$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = du$

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$ ← 2

$2e^{\sqrt{x}} + C$

180

$\int xe^{x^2+5}dx =$

$\frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C_1$

$x^2 + 5 = u \leftarrow 1$

$2xdx = du$

$xdx = \frac{du}{2} \leftarrow 2$

$\frac{1}{2}e^{x^2+5} + C$

181

$\int 2e^{\text{sen } x}\cos x dx =$

$2\int e^u du = 2e^u + C_1$

$\text{sen}\, x = u \leftarrow 1$

$\cos x dx = du \leftarrow 2$

$2e^{\text{sen } x} + C$

182

$\int \sqrt{e^x}\, dx =$

$\int e^{\frac{x}{2}}dx = 2\int e^u du = 2e^u + C_1$

$\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$

$\frac{x}{2} = u \leftarrow 1$

$\frac{dx}{2} = du$

$dx = 2du \leftarrow 2$

$2e^{\frac{x}{2}} + C$

o bien

$2\sqrt{e^x} + C$

183

Atención.

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2u^{\frac{1}{2}} + C_1$$

$e^x - 1 = u \longleftarrow \mathbf{1}$

$e^x dx = du \longleftarrow \mathbf{2}$

$2(e^x - 1)^{\frac{1}{2}} + C$

o bien

$\mathbf{2\sqrt{e^x - 1} + C}$

184

$$\int \frac{(e^x + a)dx}{e^x} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\int dx + a\int \frac{dx}{e^x} = \int dx + a\int e^{-x}dx$$

$$= \int dx - a\int e^u du$$

Para la segunda integral:

$-x = u \longleftarrow \mathbf{1}$

$-dx = du$

$dx = -du \longleftarrow \mathbf{2}$

$= x - ae^u + C_1$

$x - ae^{-x} + C$

o bien:

$\mathbf{x - \frac{a}{e^x} + C}$

185

$$\int (e^x + 1)^2 dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\int (e^{2x} + 2e^x + 1)dx$$

$$= \int e^{2x}dx + 2\int e^x dx + \int dx$$

$\mathbf{\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C}$

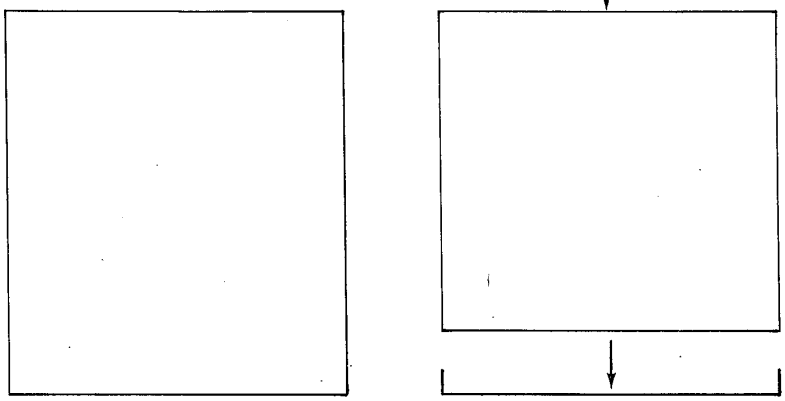
186

$\int 5^x dx =$ ⌊_____⌋

$\frac{5^x}{\ln 5} + C$

187

$\int 3^{2x} dx =$ ⌊_____⌋



$\frac{1}{2}\int 3^u du = \frac{3^u}{2\ln 3} + C_1$

$2x = u$ ←1

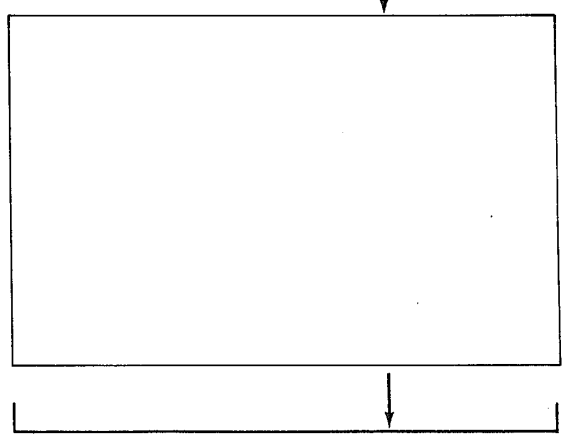
$2dx = du$

$dx = \frac{du}{2}$ ←2

$\frac{3^{2x}}{2\ln 3} + C$

188

$\int (5^x + 2)^2 dx =$ ⌊_____⌋



$\int (5^{2x} + 10 \cdot 5^x + 4)dx$

$\int 5^{2x} dx + 10\int 5^x dx + 4\int dx$

$\frac{5^{2x}}{2\ln 5} + \frac{10 \cdot 5^x}{\ln 5} + 4x + C$

8.3.5.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

8.3.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *integrar* funciones que contienen expresiones exponenciales de las formas e^u o a^u, mediante la aplicación de las reglas de la tabla 4:
- $\int e^u du = e^u + C$
- $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ para $a > 0 \wedge a \neq 1$

3.6

Evaluación de integrales definidas

189

En este punto, resulta fácil la evaluación de una integral definida si podemos resolver la integral indefinida correspondiente.

190

Recordemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b = G(b) - G(a)$$

siempre que f sea continua en [a,b].

191

Veamos.

$\int_{-2}^{3} x\,dx =$ [ ] $=$ [ ]

$=$ [ ]

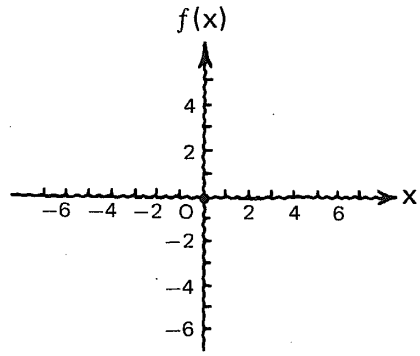
$\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{3} = \frac{(3)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}$

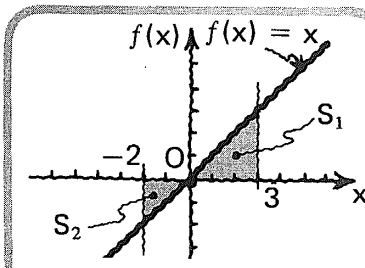
$\frac{5}{2}$

192

$\int_{-2}^{3} x\,dx = \frac{5}{2}$

Interpretación geométrica →





$s_1 = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$

$s_2 = -\frac{2 \cdot 2}{2} = -2$

$s = s_1 + s_2 = \frac{9}{2} + (-2)$

$= \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$

193

$\int_{0}^{3} (x^2 + 3)\,dx =$ [ ]

[ ]

[ ]

$\left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_0^3$

$\frac{(3)^3}{3} + 3(3) - \left[\frac{(0)^3}{3} + 3(0)\right]$

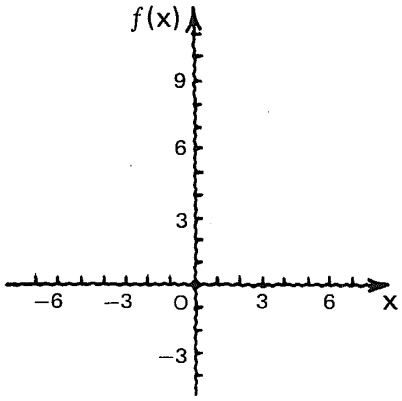
$9 + 9 - 0$

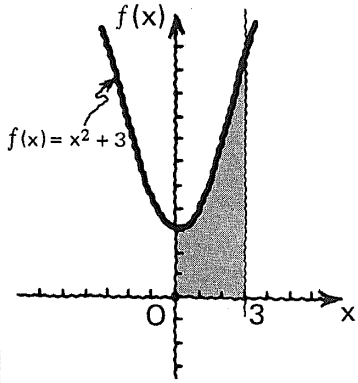
18

194

$$\int_0^3 (x^2 + 3)dx = 18$$

Interpretación geométrica





195

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$[-\cos x]_0^{\pi}$$

$$-\cos\pi - (-\cos 0)$$

$$= -\cos\pi + \cos 0$$

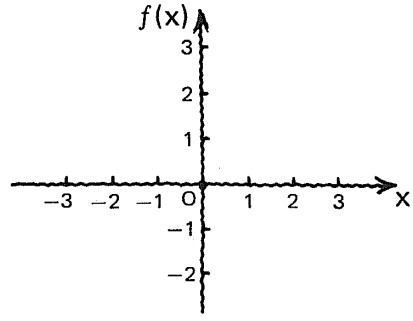
$$= -(-1) + 1$$

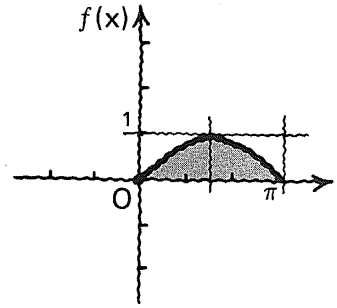
2

196

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 2$$

Interpretación geométrica





8.3.6.1

Práctica adicional de evaluación de integrales definidas por medio de la expresión

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b = G(b) - G(a),$$

si se considera necesario.

197

Consideremos la integral definida:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

Por sustitución trigonométrica podemos obtener, en términos de la nueva variable

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \quad 2z + \text{sen}2\, z + C$$

Ver cuadro siguiente.

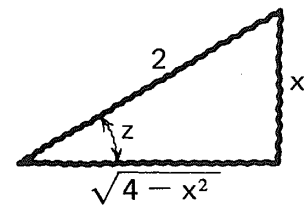
198

Ecuaciones de cambio de variable:

$$\sqrt{4 - x^2} = 2\cos z \longleftarrow 1$$

$$x = 2\text{sen}z$$

$$dx = 2\cos z dz \longleftarrow 2$$



$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = 4\int \cos^2 z dz$$

$$= 4\int \frac{1 + \cos 2z}{2}\, dz$$

$$= 2\int dz + 2\int \cos 2z dz$$

$$= 2z + \text{sen}2z + C$$

199

Podemos escribir:

valores de z

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = 4\int_{?}^{?} \cos^2 z\, dz$$

valores de x

$$= \left[2z + \operatorname{sen} 2z\right]_{?}^{?}$$

pero los límites de integración deberán ser valores de z.

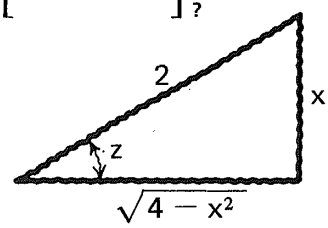
200

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = 4\int_{?}^{?} \cos^2 z\, dz = \left[2z + \operatorname{sen} 2z\right]_{?}^{?}$$

Puesto que:

$x = 2\operatorname{sen} z$

$z = \operatorname{Arcsen} \dfrac{x}{2}$



tenemos para el límite superior:

$\sqrt{4 - x^2} = 2\cos z$ ← 1

$x = 2\operatorname{sen} z$

$dx = 2\cos z\, dz$ ← 2

si $x = 2$;

$z = \operatorname{Arcsen} 1 =$ [ ]

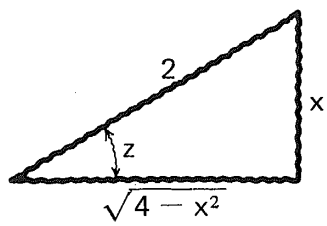
$\dfrac{\pi}{2}$

201

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = 4\int_{?}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\, dz = \left[2z + \operatorname{sen} z\right]_{?}^{\frac{\pi}{2}}$$

Similarmente, para el límite inferior:

[ ]



En $z = \operatorname{Arcsen} \dfrac{x}{2}$

si $x = -2$

$z = \operatorname{Arcsen}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$

202

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\, dz = \left[2z + \operatorname{sen} 2z \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$[\pi + \operatorname{sen} \pi] - [-\pi + \operatorname{sen}(-\pi)]$

$[\pi + 0] - [-\pi + 0]$

2π

203

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\, dz = \left[2z + \operatorname{sen} 2z \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$$

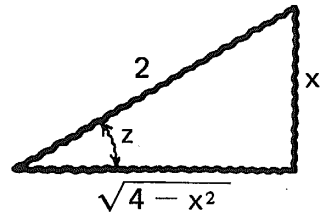
204

Mucha atención.

Hemos visto que es posible expresar el resultado de la integral indefinida en términos de la variable original.

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = \left[2z + \operatorname{sen} 2z \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\boxed{\qquad\qquad} \right]_{-2}^{2}$$



$\sqrt{4 - x^2}$

$\sqrt{4 - x^2} = 2\cos z$ ← 1

$x = 2\operatorname{sen} z$

$dx = 2\cos z\, dz$ ← 2

puesto que:
$\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$

$$2\operatorname{Arcsen} \frac{x}{2} + \cancel{2} \cdot \frac{x}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$$

$$2\operatorname{Arcsen} \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}$$

205

Entonces:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = \left[2z + \operatorname{sen} 2z\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[2\operatorname{Arcsen} \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} \right]_{-2}^{2}$$

$$= \boxed{}$$

$$\left[2\operatorname{Arcsen} 1 + \frac{2\sqrt{4 - (2)^2}}{2}\right]$$

$$\left[2\operatorname{Arcsen} (-1) + \frac{(-2)\sqrt{4 - (-2)^2}}{2}\right]$$

$$\left[2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\right] - \left[2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 0\right]$$

$$\pi - (-\pi)$$

$$2\pi$$

206

Estudiar con suma atención este esquema:

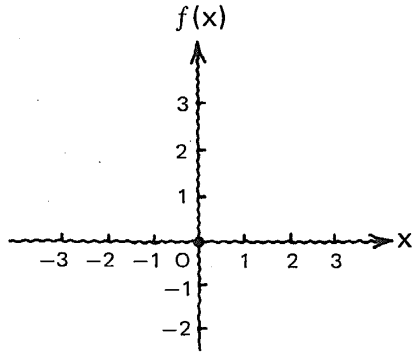
$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx \rightarrow \left[2\operatorname{Arcsen} \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} \right]_{-2}^{2} \rightarrow 2\pi$$

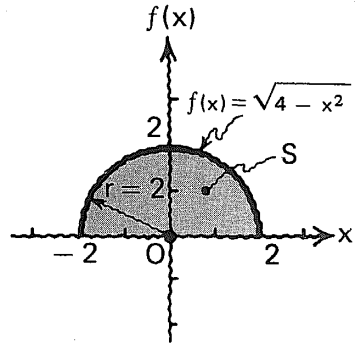
$$4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\, dz \rightarrow \left[2z + \operatorname{sen} 2z\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rightarrow 2\pi$$

207

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx = 2\pi$$

Interpretación geométrica →





Sabemos que:

$$S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi(2)^2}{2} = 2\pi$$

8.3.6.2

Práctica adicional de
cambio de límites de integración,
si se considera necesario.

8.3.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de

- *evaluar* integrales definidas por medio de la expresión:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx \right]_a^b = G(b) - G(a)$$

- *cambiar* los límites de integración al efectuarse algún cambio de variable independiente.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de septiembre de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO REG KC 100